

ELEMI BÁZISTRANSZFORMÁCIÓ LÉPÉSEI

1. EGYSZERŰSÍTETT VÁLTOZAT

1.a) Paramétert nem tartalmazó eset

A bázistranszformáció egyszerűsített változatában a **bázison kívül** elhelyezkedő vektorokból – **amennyit csak lehetséges** – beviszünk a **bázisban lévő üres helyekre**.

	a	b	c	d	e	f

Példa: Hajtsunk végre elemi bázistranszformációkat a következő vektorokkal

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 9 \\ 10 \\ 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{d} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

1. LÉPÉS: Azokat a vektorokat, amelyekkel végre szeretnénk hajtani a bázistranszformációt, táblázat formájában írjuk fel. A táblázat minden egyes oszlopa egy vektornak felel meg, az **oszlop tetején a vektor betűjelét** szerepeltetjük. Az induló táblázatban a **bázis** egyelőre **üres**, azaz a táblázat egyes **sorainak elejére semmit nem írunk**.

	a	b	c	d
	3	9	1	5
	2	10	2	2
	-1	1	1	-3
	0	-3	-1	1
	1	2	0	2

2. LÉPÉS: Generáló elemet választunk – és bekeretezzük - az alábbi szabályok betartásával:

→ **csak olyan sorból** választhatunk, **amely sor elején a bázis üres**, azaz ahol a bázisban még nincs vektor (Természetesen az első táblázat esetén ez bármelyik sorra teljesül, tehát bármelyik sorban választhatunk, később azonban ez már nem lesz érvényes)

→ a generáló elem **nulla kivételével bármilyen szám** lehet (célszerű - de nem kötelező - olyan számot választani, amely számmal az adott szám sorának összes többi elemét el tudjuk osztani maradék nélkül, mert így elkerüljük, hogy törtekkel kelljen dolgozni, ezért az 1-es például mindig jó választás)

Az **1. LÉPÉS**ben felírt induló táblázat esetén a következőképp gondolkodunk:

→ bármelyik sorban választhatunk generáló elemet, mert egyik sor elején sincsen még a bázisban vektor

→ a táblázatban lévő **nullák kivételével bármelyik számot** választhatjuk, de **CÉLSZERŰ** valamelyik **1-es**et választani vagy jó választás lehet a **második sorbeli bármelyik 2-es** is (mert a második sor összes számadata páros, tehát el lehet osztani 2-vel)

A példában választásunk legyen a **következő**:

	a	b	c	d
	3	9	1	5
	2	10	2	2
	-1	1	1	-3
	0	-3	-1	1
	1	2	0	2

3. LÉPÉS: A **generáló elem oszlopának tetején lévő „betűt”** beviszük a bázisba a **generáló elem sorának elején lévő üres helyre**, majd új táblázatot készítünk. A **bázisba bekerülő vektor**nak megfelelő oszlop az **új táblázatban** már **hiányzik**, azaz a példában az új táblázatban a **d** vektor oszlopa eltűnik.

	a	b	c	d		a	b	c
	3	9	1	5				
	2	10	2	2				
	-1	1	1	-3				
	0	-3	-1	1	d			
	1	2	0	2				

4.LÉPÉS: Kiszámítjuk az új táblázatban azokat a számokat, amelyek a generáló elemnek megfelelő sorban helyezkednek el. A számítást úgy végezzük, hogy a generáló elem sorában lévő számokat (az előző táblázatban) elosztjuk a generáló elemmel.

a	b	c	d		a	b	c
3	9	1	5				
2	10	2	2				
-1	1	1	-3				
0	-3	-1	1	d	0/1=0	-3/1=-3	-1/1=-1
1	2	0	2				

5.LÉPÉS: Kitöltjük az új táblázatban szereplő üres oszlopokat mégpedig oszloponként haladva balról jobb felé. Mindegyik ilyen oszlopban már van egy ismert számadat, melyet a 4.LÉPÉSben töltöttünk ki.

a	b	c	d		a	b	c
3	9	1	5				
2	10	2	2				
-1	1	1	-3				
0	-3	-1	1	d	0	-3	-1
1	2	0	2				

→ **5A.LÉPÉS:** Megnézzük, vannak-e olyan oszlopok, amelyekben a már kitöltött (ismert) szám nulla. Ha vannak ilyen oszlopok, akkor először ezeket töltjük ki, ha nincsenek ilyenek, akkor az 5B.LÉPÉS következik. Minden ilyen oszlop (jelen példában csak az a jelű oszlop ilyen) összes számadata megegyezik az előző táblázatban szereplő azonos betűjelű oszlop számadataival, tehát csak át kell másolnunk a megfelelő oszlopot az előző táblázatból.

a	b	c	d		a	b	c
3	9	1	5		3		
2	10	2	2		2		
-1	1	1	-3		-1		
0	-3	-1	1	d	0	-3	-1
1	2	0	2		1		

→ **5B.LÉPÉS:** A még hiányzó oszlopok kitöltése (oszloponként haladva) mindig a következő képlet alkalmazásával történik:

(új oszlop ismeretlen számadatai) = (új oszloppal azonos betűjelű oszlop számadatai az előző táblázatban a generáló elem sorában lévő számadat nélkül) - (új oszlop ismert számadata) * (a generáló elem oszlopa az előző táblázatban a generáló elem nélkül)

$$(9,10,1,2) - (-3) * (5,2,-3,2) = (9,10,1,2) - (-15,-6,9,-6) = (24,16,-8,8)$$

a	b	c	d		a	b	c		a	b	c
3	9	1	5		3				3	24	
2	10	2	2		2				2	16	
-1	1	1	-3		-1				-1	-8	
0	-3	-1	1	d	0	-3	-1	d	0	-3	-1
1	2	0	2		1				1	8	

$$(1,2,1,0) - (-1) * (5,2,-3,2) = (1,2,1,0) - (-5,-2,3,-2) = (6,4,-2,2)$$

a	b	c	d		a	b	c		a	b	c
3	9	1	5		3	24			3	24	6
2	10	2	2		2	16			2	16	4
-1	1	1	-3		-1	-8			-1	-8	-2
0	-3	-1	1	d	0	-3	-1	d	0	-3	-1
1	2	0	2		1	8			1	8	2

2-5.LÉPÉSEK elvégzése után a következőképpen néz ki a feladatunk:

a	b	c	d		a	b	c
3	9	1	5		3	24	6
2	10	2	2		2	16	4
-1	1	1	-3		-1	-8	-2
0	-3	-1	1	d	0	-3	-1
1	2	0	2		1	8	2

6.LÉPÉS: Az új táblázatról haladunk tovább, mégpedig úgy, hogy a **2-5.LÉPÉSEK**-et addig ismételtjük, ameddig a **2. LÉPÉS**-nél el nem akadunk, azaz valami miatt nem tudunk generáló elemet választani. A példában ez a következőképpen alakul (**2., 3., 4., 5.lépés**):

	a	b	c	d		a	b	c		b	c
	3	9	1	5		3	24	6		0	0
	2	10	2	2		2	16	4	a	8	2
	-1	1	1	-3		-1	-8	-2		0	0
	0	-3	-1	1	d	0	-3	-1	d	-3	-1
	1	2	0	2		1	8	2		0	0

Az **utolsó táblázat**, ahol már nem tudjuk végrehajtani a **2.LÉPÉS**-t az alábbi:

	a	b	c	d		a	b	c		b	c
	3	9	1	5		3	24	6		0	0
	2	10	2	2		2	16	4	a	8	2
	-1	1	1	-3		-1	-8	-2		0	0
	0	-3	-1	1	d	0	-3	-1	d	-3	-1
	1	2	0	2		1	8	2		0	0

EZZEL A BÁZISTRANSZFORMÁCIÓ VÉGETÉRT

1.b) Paramétert is tartalmazó eset

A feladatmegoldás lépései – kis eltéréssel – azonosak a paramétert nem tartalmazó esetben leírtakkal.

Példa: Hajtsunk végre elemi bázistranszformációkat a következő vektorokkal, amelyek **α** és **β** paramétereket tartalmaznak.

$$\underline{\mathbf{a}} = \begin{bmatrix} 3 \\ \alpha \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \underline{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} 9 \\ 10 \\ 1 \\ -3 \\ \alpha \end{bmatrix} \quad \underline{\mathbf{c}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ \beta \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \underline{\mathbf{d}} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

1. LÉPÉS: Megegyezik **1.a) Paramétert nem tartalmazó eset** című fejezetben leírt **1.LÉPÉS**-sel.

	a	b	c	d
	3	9	1	5
	α	10	2	2
	-1	1	β	-3
	0	-3	-1	1
	1	α	1	2

2.LÉPÉS: Generáló elemet választunk – és bekeretezzük - az alábbi szabályok betartásával:

→ **csak olyan sorból** választhatunk, **amely sor elején a bázis üres**, azaz ahol a bázisban még nincs vektor (Természetesen az első táblázat esetén ez bármelyik sorra teljesül, tehát bármelyik sorban választhatunk, később azonban ez már nem lesz érvényes)

→ **paraméter sosem lehet generáló elem**

→ **célszerű** (de **NEM KÖTELEZŐ!!**) **olyan sorban** választani generáló elemet, **amely** sor egyáltalán **nem tartalmaz paramétert**. **Ha mindegyik sorban van paraméter**, akkor az **előbbi 2 szabály betartásával bármelyik sorban** választhatunk generáló elemet.

→ **célszerű** (de **NEM KÖTELEZŐ!!**) **olyan oszlopban** választani generáló elemet, **amely** oszlop egyáltalán **nem tartalmaz paramétert**. Ha minden oszlop tartalmaz paramétert, akkor érdemes a legkevesebb paramétert tartalmazó oszlopból választani

→ a generáló elem **nulla kivételével bármilyen szám** lehet (célszerű - de nem kötelező - olyan számot választani, amely számmal az adott szám sorának összes többi elemét el tudjuk osztani maradék nélkül, mert így elkerüljük, hogy törtekkel kelljen dolgozni, ezért az 1-es például mindig jó választás)

Az **1.LÉPÉS**ben felírt induló táblázat esetén a következőképp gondolkodunk:

→ bármelyik sorban választhatunk generáló elemet, mert egyik sor elején sincsen még a bázisban vektor

→ a táblázatban szereplő α és β paraméter nem lehet generáló elem

→ a 2., a 3. és az 5. sor tartalmaz paramétert, ezért ezekből a sorokból nem célszerű a választás, mert ez elbonyolítaná a feladatot és van 2 olyan sorunk (1. és 4. sor), amelyben nincs paraméter. Ha nem lenne olyan sorunk, amelyben nincs paraméter, akkor kénytelenek lennénk paramétert tartalmazó sorban választani.

→ az 1., a 2. és a 3. oszlop tartalmaz paramétert, ezért ezekből az oszlopokból nem célszerű a választás, mert ez elbonyolítaná a feladatot.

→ a nulla nem lehet generáló elem

→ összefoglalva a fentieket: az 1. vagy a 4. sorból és a 4. oszlopból választjuk bármelyik nullától különböző elemet, de célszerű valamelyik 1-est választani, hogy a számítás során ne keletkezzenek törtek (ha nincs 1-es és olyan szám sincs, amellyel a sor összes száma osztható, akkor bele kell törődnünk, hogy törtekkel fogunk dolgozni)

A példában választásunk legyen a **következő**:

	a	b	c	d
	3	9	1	5
	α	10	2	2
	-1	1	β	-3
	0	-3	-1	1
	1	α	1	2

3.LÉPÉS: Megegyezik 1.a) Paramétert nem tartalmazó eset című fejezetben leírt **3.LÉPÉS**-sel.

	a	b	c	d		a	b	c
	3	9	1	5				
	α	10	2	2				
	-1	1	β	-3				
	0	-3	-1	1	d			
	1	α	1	2				

4.LÉPÉS: Megegyezik 1.a) Paramétert nem tartalmazó eset című fejezetben leírt **4.LÉPÉS**-sel.

	a	b	c	d		a	b	c
	3	9	1	5				
	α	10	2	2				
	-1	1	β	-3				
	0	-3	-1	1	d	$0/1=0$	$-3/1=-3$	$-1/1=-1$
	1	α	1	2				

5.LÉPÉS: Megegyezik 1.a) Paramétert nem tartalmazó eset című fejezetben leírt **5.LÉPÉS**-sel.

	a	b	c	d		a	b	c
	3	9	1	5				
	α	10	2	2				
	-1	1	β	-3				
	0	-3	-1	1	d	0	-3	-1
	1	α	1	2				

→ **5A.LÉPÉS:** Megegyezik 1.a) Paramétert nem tartalmazó eset című fejezetben leírt **5A.LÉPÉS**-sel.

	a	b	c	d		a	b	c
	3	9	1	5		3		
	α	10	2	2		α		
	-1	1	β	-3		-1		
	0	-3	-1	1	d	0	-3	-1
	1	α	1	2		1		

→ **5B.LÉPÉS:** Megegyezik 1.a) Paramétert nem tartalmazó eset című fejezetben leírt **5B.LÉPÉS**-sel.

$$(9, 10, 1, \alpha) - (-3) \cdot (5, 2, -3, 2) = (9, 10, 1, \alpha) - (-15, -6, 9, -6) = (24, 16, -8, \alpha+6)$$

	a	b	c	d		a	b	c		a	b	c
	3	9	1	5		3				3	24	
	α	10	2	2		α				α	16	
	-1	1	β	-3		-1				-1	-8	
	0	-3	-1	1	d	0	-3	-1	d	0	-3	-1
	1	α	1	2		1				1	$\alpha+6$	

$$(1, 2, \beta, 1) - (-1) \cdot (5, 2, -3, 2) = (1, 2, \beta, 1) - (-5, -2, 3, -2) = (6, 4, \beta-3, 3)$$

	a	b	c	d		a	b	c		a	b	c
	3	9	1	5		3	24			3	24	6
	α	10	2	2		α	16			α	16	4
	-1	1	β	-3		-1	-8			-1	-8	$\beta-3$
	0	-3	-1	1	d	0	-3	-1	d	0	-3	-1
	1	α	1	2		1	$\alpha+6$			1	$\alpha+6$	3

2-5.LÉPÉSEK elvégzése után a következőképpen néz ki a feladatunk:

	a	b	c	d		a	b	c
	3	9	1	5		3	24	6
	α	10	2	2		α	16	4
	-1	1	β	-3		-1	-8	$\beta-3$
	0	-3	-1	1	d	0	-3	-1
	1	α	1	2		1	$\alpha+6$	3

6.LÉPÉS: Az új táblázatról haladunk tovább, mégpedig úgy, hogy a **2-5.LÉPÉSEK**-et addig ismételtjük, ameddig a **2. LÉPÉS**-nél el nem akadunk, azaz valami miatt nem tudunk generáló elemet választani. A példában ez a következőképpen alakul (**2.**, **3.**, **4.**, **5.** lépés):

	a	b	c	d		a	b	c			b	c
	3	9	1	5		3	24	6	a		8	2
	α	10	2	2		α	16	4			$16-8\alpha$	$4-2\alpha$
	-1	1	β	-3		-1	-8	$\beta-3$			0	$\beta-1$
	0	-3	-1	1	d	0	-3	-1	d		-3	-1
	1	α	1	2		1	$\alpha+6$	3			$\alpha-2$	1

	a	b	c	d		a	b	c		b	c		b
	3	9	1	5		3	24	6	a	8	2	a	$12-2\alpha$
	α	10	2	2		α	16	4		$16-8\alpha$	$4-2\alpha$		$2\alpha^2-16\alpha+24$
	-1	1	β	-3		-1	-8	$\beta-3$		0	$\beta-1$		$2\beta+\alpha-\alpha\beta-2$
	0	-3	-1	1	d	0	-3	-1	d	-3	-1	d	$\alpha-5$
	1	α	1	2		1	$\alpha+6$	3		$\alpha-2$	1	c	$\alpha-2$

Az **utolsó táblázat**, ahol már nem tudjuk végrehajtani a **2.LÉPÉS**-t az alábbi:

	a	b	c	d		a	b	c		b	c		b
	3	9	1	5		3	24	6	a	8	2	a	$12-2\alpha$
	α	10	2	2		α	16	4		$16-8\alpha$	$4-2\alpha$		$2\alpha^2-16\alpha+24$
	-1	1	β	-3		-1	-8	$\beta-3$		0	$\beta-1$		$2\beta+\alpha-\alpha\beta-2$
	0	-3	-1	1	d	0	-3	-1	d	-3	-1	d	$\alpha-5$
	1	α	1	2		1	$\alpha+6$	3		$\alpha-2$	1	c	$\alpha-2$

EZZEL A BÁZISTRANSZFORMÁCIÓ VÉGETÉRT