

ELEMI BÁZISTRANSZFORMÁCIÓ LÉPÉSEI

2.NEHEZÍTETT VÁLTOZAT

2.a) Paramétert nem tartalmazó eset

A bázistranszformáció nehezített változatában a **bázison kívül** elhelyezkedő vektorokból – **amennyit csak lehetséges** – **kicszerélünk** a **bázisban lévő e_i vektorokkal**.

| | a | b | c | d | e | f |
|-------|---|---|---|---|---|---|
| e_1 | | | | | | |
| e_2 | | | | | | |
| e_3 | | | | | | |
| e_4 | | | | | | |

Példa: Hajtsunk végre elemi bázistranszformációkat a következő vektorokkal

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} 9 \\ 10 \\ 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \underline{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \underline{d} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

1. LÉPÉS: Azokat a vektorokat, amelyekkel végre szeretnénk hajtani a bázistranszformációt, táblázat formájában írjuk fel. A táblázat minden egyes oszlopa egy vektornak felel meg, az oszlop tetején a vektor betűjelét szerepeltetjük. Az induló táblázatban a **bázisban e_1, e_2, e_3, \dots** stb szerepel, mégpedig **annyi e_i , ahány sora van a táblázatunknak**, azaz ahány számot tartalmaz a táblázat egy oszlopvektora (jelen példában 5 db).

| | a | b | c | d |
|-------|----|----|----|----|
| e_1 | 3 | 9 | 1 | 5 |
| e_2 | 2 | 10 | 2 | 2 |
| e_3 | -1 | 1 | 1 | -3 |
| e_4 | 0 | -3 | -1 | 1 |
| e_5 | 1 | 2 | 0 | 2 |

2.LÉPÉS: Generáló elemet választunk – és bekeretezzük – az alábbi szabályok betartásával:

- **csak olyan sorból** választhatunk, **amely sor elején a bázisban e_i vektor** szerepel (Természetesen az első táblázat esetén ez bármelyik sorra teljesül, tehát bármelyik sorban választhatunk, később azonban ez már nem lesz érvényes)
- **tilos olyan oszlopból választani, amelynek tetején e_i vektor szerepel** (Természetesen az első táblázat esetén bármelyik oszlopból választhatunk, mert az összes e_i vektor a bázisban van és nem az oszlopok tetején, de ez később már nem lesz érvényes)
- a generáló elem **nulla kivételével bármilyen szám** lehet (célszerű - de nem kötelező - olyan számot választani, amely számmal az adott szám sorának összes többi elemét el tudjuk osztani maradék nélkül, mert így elkerüljük, hogy törtekkel kelljen dolgozni, ezért az 1-es például mindig jó választás)

Az **1.LÉPÉS**ben felírt induló táblázat esetén a következőképp gondolkodunk:

- bármelyik sorban választhatunk generáló elemet, mert mindegyik sor elején e_i vektor szerepel a bázisban
- bármelyik oszlopban választhatunk generáló elemet, mert egyik oszlop tetején sincsen e_i vektor
- a táblázatban lévő **nullák kivételével bármelyik számot** választhatjuk, de **CÉLSZERŰ** valamelyik **1-es** választani vagy jó választás lehet a **második sorbeli bármelyik 2-es** is (mert a második sor összes számadata páros, tehát el lehet osztani 2-vel)

A példában választásunk legyen a **következő**:

| | a | b | c | d |
|-------|----|----|----|----------|
| e_1 | 3 | 9 | 1 | 5 |
| e_2 | 2 | 10 | 2 | 2 |
| e_3 | -1 | 1 | 1 | -3 |
| e_4 | 0 | -3 | -1 | 1 |
| e_5 | 1 | 2 | 0 | 2 |

3.LÉPÉS: A **generáló elem sorának elején és oszlopának tetején lévő „betűket”** kicszeréljük egymással, majd ezekkel az új peremekkel új táblázatot készítünk

| | a | b | c | d | |
|-------|----|----|----|----------|----------|
| e_1 | 3 | 9 | 1 | 5 | e_1 |
| e_2 | 2 | 10 | 2 | 2 | e_2 |
| e_3 | -1 | 1 | 1 | -3 | e_3 |
| e_4 | 0 | -3 | -1 | 1 | d |
| e_5 | 1 | 2 | 0 | 2 | e_5 |

4.LÉPÉS: Kiszámítjuk az új táblázatban azokat a számokat, amelyek a táblázat bal széléről (a bázisból) a táblázat tetejére (bázison kívülre) került e_i vektor alatt helyezkednek el (a példában az e_4 kerül ki a bázisból, tehát ebben a lépésben az e_4 oszlop alatti számokat töltjük ki). A számítás menete a következő:

→ a **generáló elemnek megfelelő helyre** (az új táblázatban) beírjuk a **generáló elem** reciprokát ($1/\text{generáló elem}$).

| | a | b | c | d | | a | b | c | e_4 |
|-------|----|----|----|----|-------|---|---|---|---------|
| e_1 | 3 | 9 | 1 | 5 | e_1 | | | | |
| e_2 | 2 | 10 | 2 | 2 | e_2 | | | | |
| e_3 | -1 | 1 | 1 | -3 | e_3 | | | | |
| e_4 | 0 | -3 | -1 | 1 | d | | | | $1/1=1$ |
| e_5 | 1 | 2 | 0 | 2 | e_5 | | | | |

→ az **oszlop többi elemét** úgy kapjuk, hogy a **generáló elem oszlopában lévő számokat** (az előző táblázatban) elosztjuk a **generáló elem -1-szeresével**.

| | a | b | c | d | | a | b | c | e_4 |
|-------|----|----|----|----|-------|---|---|---|-----------|
| e_1 | 3 | 9 | 1 | 5 | e_1 | | | | $5/-1=-5$ |
| e_2 | 2 | 10 | 2 | 2 | e_2 | | | | $2/-1=-2$ |
| e_3 | -1 | 1 | 1 | -3 | e_3 | | | | $-3/-1=3$ |
| e_4 | 0 | -3 | -1 | 1 | d | | | | 1 |
| e_5 | 1 | 2 | 0 | 2 | e_5 | | | | $2/-1=-2$ |

5.LÉPÉS: Kiszámítjuk az új táblázatban azokat a számokat, amelyek a **generáló elemnek megfelelő sorban** helyezkednek el (a **generáló elem helyén álló szám kivételével**, hiszen ezt már kiszámítottuk az előbb a **4.LÉPÉS**-ben). A számítást úgy végezzük, hogy a **generáló elem sorában lévő számokat** (az előző táblázatban) **elosztjuk a generáló elemmel**.

| | a | b | c | d | | a | b | c | e_4 |
|-------|----|----|----|----|-------|---------|-----------|-----------|-------|
| e_1 | 3 | 9 | 1 | 5 | e_1 | | | | -5 |
| e_2 | 2 | 10 | 2 | 2 | e_2 | | | | -2 |
| e_3 | -1 | 1 | 1 | -3 | e_3 | | | | 3 |
| e_4 | 0 | -3 | -1 | 1 | d | $0/1=0$ | $-3/1=-3$ | $-1/1=-1$ | 1 |
| e_5 | 1 | 2 | 0 | 2 | e_5 | | | | -2 |

6.LÉPÉS: Kitöltjük az új táblázatban szereplő **üres oszlopokat** mégpedig **oszloponként haladva balról jobb felé**. Mindegyik ilyen oszlopban már van egy **ismert szám**adat, melyet az **5.LÉPÉS**ben töltöttünk ki.

| | a | b | c | d | | a | b | c | e_4 |
|-------|----|----|----|----|---|---|----|----|-------|
| e_1 | 3 | 9 | 1 | 5 | | | | | -5 |
| e_2 | 2 | 10 | 2 | 2 | | | | | -2 |
| e_3 | -1 | 1 | 1 | -3 | | | | | 3 |
| e_4 | 0 | -3 | -1 | 1 | d | 0 | -3 | -1 | 1 |
| e_5 | 1 | 2 | 0 | 2 | | | | | -2 |

→ **6A.LÉPÉS:** Megnézzük, vannak-e olyan oszlopok, amelyekben a **már kitöltött (ismert) szám nulla**. Ha vannak ilyen oszlopok, akkor először ezeket töltjük ki, ha nincsenek ilyenek, akkor az **6B.LÉPÉS** következik. Minden **ilyen oszlop** (jelen példában csak az **a jelű** oszlop ilyen) **összes számadata megegyezik** az **előző táblázatban szereplő azonos betűjelű oszlop** számadataival, tehát csak **át kell másolnunk a megfelelő oszlopot az előző táblázatból**.

| | a | b | c | d | | a | b | c | e_4 |
|-------|----|----|----|----|-------|----|----|----|-------|
| e_1 | 3 | 9 | 1 | 5 | e_1 | 3 | | | -5 |
| e_2 | 2 | 10 | 2 | 2 | e_2 | 2 | | | -2 |
| e_3 | -1 | 1 | 1 | -3 | e_3 | -1 | | | 3 |
| e_4 | 0 | -3 | -1 | 1 | d | 0 | -3 | -1 | 1 |
| e_5 | 1 | 2 | 0 | 2 | e_5 | 1 | | | -2 |

→ **6B.LÉPÉS:** A még hiányzó oszlopok kitöltése (oszloponként haladva) mindig a következő képlet alkalmazásával történik:

(új oszlop ismeretlen számadatai) = (új oszloppal azonos betűjelű oszlop számadatai az előző táblázatban a generáló elem sorában lévő számadat nélkül) - (új oszlop ismert számadata) * (a generáló elem oszlopa az előző táblázatban a generáló elem nélkül)

$$(9,10,1,2) - (-3) * (5,2,-3,2) = (9,10,1,2) - (-15,-6,9,-6) = (24,16,-8,8)$$

| | a | b | c | d | | a | b | c | e_4 | | a | b | c | e_4 |
|-------|----|----|----|----|-------|----|----|----|-------|-------|----|----|----|-------|
| e_1 | 3 | 9 | 1 | 5 | e_1 | 3 | | | -5 | e_1 | 3 | 24 | | -5 |
| e_2 | 2 | 10 | 2 | 2 | e_2 | 2 | | | -2 | e_2 | 2 | 16 | | -2 |
| e_3 | -1 | 1 | 1 | -3 | e_3 | -1 | | | 3 | e_3 | -1 | -8 | | 3 |
| e_4 | 0 | -3 | -1 | 1 | d | 0 | -3 | -1 | 1 | d | 0 | -3 | -1 | 1 |
| e_5 | 1 | 2 | 0 | 2 | e_5 | 1 | | | -2 | e_5 | 1 | 8 | | -2 |

$$(1,2,1,0) - (-1) \cdot (5,2,-3,2) = (1,2,1,0) - (-5,-2,3,-2) = (6,4,-2,2)$$

| | a | b | c | d | | a | b | c | e ₄ | | a | b | c | e ₄ |
|----------------|----|----|----|----|----------------|----|----|----|----------------|----------------|----|----|----|----------------|
| e ₁ | 3 | 9 | 1 | 5 | e ₁ | 3 | 24 | | -5 | e ₁ | 3 | 24 | 6 | -5 |
| e ₂ | 2 | 10 | 2 | 2 | e ₂ | 2 | 16 | | -2 | e ₂ | 2 | 16 | 4 | -2 |
| e ₃ | -1 | 1 | 1 | -3 | e ₃ | -1 | -8 | | 3 | e ₃ | -1 | -8 | -2 | 3 |
| e ₄ | 0 | -3 | -1 | 1 | d | 0 | -3 | -1 | 1 | d | 0 | -3 | -1 | 1 |
| e ₅ | 1 | 2 | 0 | 2 | e ₅ | 1 | 8 | | -2 | e ₅ | 1 | 8 | 2 | -2 |

2-6.LÉPÉSEK elvégzése után a következőképpen néz ki a feladatunk:

| | a | b | c | d | | a | b | c | e ₄ |
|----------------|----|----|----|----|----------------|----|----|----|----------------|
| e ₁ | 3 | 9 | 1 | 5 | e ₁ | 3 | 24 | 6 | -5 |
| e ₂ | 2 | 10 | 2 | 2 | e ₂ | 2 | 16 | 4 | -2 |
| e ₃ | -1 | 1 | 1 | -3 | e ₃ | -1 | -8 | -2 | 3 |
| e ₄ | 0 | -3 | -1 | 1 | d | 0 | -3 | -1 | 1 |
| e ₅ | 1 | 2 | 0 | 2 | e ₅ | 1 | 8 | 2 | -2 |

7.LÉPÉS: Az új táblázatról haladunk tovább, mégpedig úgy, hogy a **2-6.LÉPÉSEK**-et addig ismételtjük, ameddig a **2. LÉPÉS**-nél el nem akadunk, azaz valami miatt nem tudunk generáló elemet választani. A példában ez a következőképpen alakul (**2., 3., 4., 5., 6.lépés**):

| | a | b | c | d | | a | b | c | e ₄ | | e ₂ | b | c | e ₄ |
|----------------|----|----|----|----|----------------|----|----|----|----------------|----------------|----------------|----|----|----------------|
| e ₁ | 3 | 9 | 1 | 5 | e ₁ | 3 | 24 | 6 | -5 | e ₁ | -3/2 | 0 | 0 | -2 |
| e ₂ | 2 | 10 | 2 | 2 | e ₂ | 2 | 16 | 4 | -2 | a | 1/2 | 8 | 2 | -1 |
| e ₃ | -1 | 1 | 1 | -3 | e ₃ | -1 | -8 | -2 | 3 | e ₃ | 1/2 | 0 | 0 | 2 |
| e ₄ | 0 | -3 | -1 | 1 | d | 0 | -3 | -1 | 1 | d | 0 | -3 | -1 | 1 |
| e ₅ | 1 | 2 | 0 | 2 | e ₅ | 1 | 8 | 2 | -2 | e ₅ | -1/2 | 0 | 0 | -1 |

Az **utolsó táblázat**, ahol már nem tudjuk végrehajtani a **2.LÉPÉS**-t az alábbi:

| | a | b | c | d | | a | b | c | e ₄ | | e ₂ | b | c | e ₄ |
|----------------|----|----|----|----|----------------|----|----|----|----------------|----------------|----------------|----|----|----------------|
| e ₁ | 3 | 9 | 1 | 5 | e ₁ | 3 | 24 | 6 | -5 | e ₁ | -3/2 | 0 | 0 | -2 |
| e ₂ | 2 | 10 | 2 | 2 | e ₂ | 2 | 16 | 4 | -2 | a | 1/2 | 8 | 2 | -1 |
| e ₃ | -1 | 1 | 1 | -3 | e ₃ | -1 | -8 | -2 | 3 | e ₃ | 1/2 | 0 | 0 | 2 |
| e ₄ | 0 | -3 | -1 | 1 | d | 0 | -3 | -1 | 1 | d | 0 | -3 | -1 | 1 |
| e ₅ | 1 | 2 | 0 | 2 | e ₅ | 1 | 8 | 2 | -2 | e ₅ | -1/2 | 0 | 0 | -1 |

EZZEL A BÁZISTRANSZFORMÁCIÓ VÉGETÉRT

2.b) Paramétert is tartalmazó eset

A feladatmegoldás lépései – kis eltéréssel – azonosak a paramétert nem tartalmazó esetben leírtakkal.

Példa: Hajtsunk végre elemi bázistranszformációkat a következő vektorokkal, amelyek **α** és **β** paramétereket tartalmaznak.

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ \alpha \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} 9 \\ 10 \\ 1 \\ -3 \\ \alpha \end{bmatrix} \quad \underline{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ \beta \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \underline{d} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

1. LÉPÉS: Megegyezik **2.a) Paramétert nem tartalmazó eset** című fejezetben leírt **1.LÉPÉS**-sel.

| | a | b | c | d |
|----------------|----------|----------|---------|----|
| e ₁ | 3 | 9 | 1 | 5 |
| e ₂ | α | 10 | 2 | 2 |
| e ₃ | -1 | 1 | β | -3 |
| e ₄ | 0 | -3 | -1 | 1 |
| e ₅ | 1 | α | 1 | 2 |

2.LÉPÉS: Generáló elemet választunk – és bekeretezzük - az alábbi szabályok betartásával:

- **csak olyan sorból** választhatunk, **amely sor elején a bázisban e_i vektor** szerepel (Természetesen az első táblázat esetén ez bármelyik sorra teljesül, tehát bármelyik sorban választhatunk, később azonban ez már nem lesz érvényes)
- **tilos olyan oszlopból választani, amelynek tetején e_i vektor szerepel** (Természetesen az első táblázat esetén bármelyik oszlopból választhatunk, mert az összes e_i vektor a bázisban van és nem az oszlopok tetején, de ez később már nem lesz érvényes)
- **paraméter sosem lehet generáló elem**
- **célszerű** (de **NEM KÖTELEZŐ!!**) **olyan sorban** választani generáló elemet, **amely** sor egyáltalán **nem tartalmaz paramétert**. **Ha mindegyik sorban van paraméter**, akkor az **előbbi 3 szabály betartásával bármelyik sorban** választhatunk generáló elemet.
- **célszerű** (de **NEM KÖTELEZŐ!!**) **olyan oszlopban** választani generáló elemet, **amely** oszlop egyáltalán **nem tartalmaz paramétert**. Ha minden oszlop tartalmaz paramétert, akkor érdemes a legkevesebb paramétert tartalmazó oszlopból választani

→ a generáló elem **nulla kivételével bármilyen szám** lehet (célszerű - de nem kötelező - olyan számot választani, amely számmal az adott szám sorának összes többi elemét el tudjuk osztani maradék nélkül, mert így elkerüljük, hogy törtekkel kelljen dolgozni, ezért az 1-es például mindig jó választás)

Az **1.LÉPÉS**ben felírt induló táblázat esetén a következőképp gondolkodunk:

→ bármelyik sorban választhatunk generáló elemet, mert egyik sor elején sincsen még a bázisban vektor

→ bármelyik oszlopban választhatunk generáló elemet, mert egyik oszlop tetején sincsen e_i vektor

→ a táblázatban szereplő α és β paraméter nem lehet generáló elem

→ a 2., a 3. és az 5. sor tartalmaz paramétert, ezért ezekből a sorokból nem célszerű a választás, mert ez elbonyolítaná a feladatot és van 2 olyan sorunk (1. és 4. sor), amelyben nincs paraméter. Ha nem lenne olyan sorunk, amelyben nincs paraméter, akkor kénytelenek lennénk paramétert tartalmazó sorban választani.

→ az 1., a 2. és a 3. oszlop tartalmaz paramétert, ezért ezekből az oszlopokból nem célszerű a választás, mert ez elbonyolítaná a feladatot.

→ a nulla nem lehet generáló elem

→ összefoglalva a fentieket: az 1. vagy a 4. sorból és a 4. oszlopból választjuk bármelyik nullától különböző elemet, de célszerű valamelyik 1-est választani, hogy a számítás során ne keletkezzenek törtek (ha nincs 1-es és olyan szám sincs, amellyel a sor összes száma osztható, akkor bele kell törődnünk, hogy törtekkel fogunk dolgozni)

A példában választásunk legyen a **következő**:

| | a | b | c | d |
|-------|----------|----------|---------|----|
| e_1 | 3 | 9 | 1 | 5 |
| e_2 | α | 10 | 2 | 2 |
| e_3 | -1 | 1 | β | -3 |
| e_4 | 0 | -3 | -1 | 1 |
| e_5 | 1 | α | 1 | 2 |

3.LÉPÉS: Megegyezik **2.a) Paramétert nem tartalmazó eset** című fejezetben leírt **3.LÉPÉS**-sel.

| | a | b | c | d | | a | b | c | e_4 |
|-------|----------|----------|---------|----|-------|---|---|---|-------|
| e_1 | 3 | 9 | 1 | 5 | e_1 | | | | |
| e_2 | α | 10 | 2 | 2 | e_2 | | | | |
| e_3 | -1 | 1 | β | -3 | e_3 | | | | |
| e_4 | 0 | -3 | -1 | 1 | d | | | | |
| e_5 | 1 | α | 1 | 2 | e_5 | | | | |

4.LÉPÉS: Megegyezik **2.a) Paramétert nem tartalmazó eset** című fejezetben leírt **4.LÉPÉS**-sel.

| | a | b | c | d | | a | b | c | e_4 |
|-------|----------|----------|---------|----|-------|---|---|---|-----------|
| e_1 | 3 | 9 | 1 | 5 | e_1 | | | | $5/-1=-5$ |
| e_2 | α | 10 | 2 | 2 | e_2 | | | | $2/-1=-2$ |
| e_3 | -1 | 1 | β | -3 | e_3 | | | | $-3/-1=3$ |
| e_4 | 0 | -3 | -1 | 1 | d | | | | $1/1=1$ |
| e_5 | 1 | α | 1 | 2 | e_5 | | | | $2/-1=-2$ |

5.LÉPÉS: Megegyezik **2.a) Paramétert nem tartalmazó eset** című fejezetben leírt **5.LÉPÉS**-sel.

| | a | b | c | d | | a | b | c | e_4 |
|-------|----------|----------|---------|----|-------|---------|-----------|-----------|-------|
| e_1 | 3 | 9 | 1 | 5 | e_1 | | | | -5 |
| e_2 | α | 10 | 2 | 2 | e_2 | | | | -2 |
| e_3 | -1 | 1 | β | -3 | e_3 | | | | 3 |
| e_4 | 0 | -3 | -1 | 1 | d | $0/1=0$ | $-3/1=-3$ | $-1/1=-1$ | 1 |
| e_5 | 1 | α | 1 | 2 | e_5 | | | | -2 |

6.LÉPÉS: Megegyezik **2.a) Paramétert nem tartalmazó eset** című fejezetben leírt **6.LÉPÉS**-sel.

| | a | b | c | d | | a | b | c | e_4 |
|-------|----------|----------|---------|----|---|---|----|----|-------|
| e_1 | 3 | 9 | 1 | 5 | | | | | -5 |
| e_2 | α | 10 | 2 | 2 | | | | | -2 |
| e_3 | -1 | 1 | β | -3 | | | | | 3 |
| e_4 | 0 | -3 | -1 | 1 | d | 0 | -3 | -1 | 1 |
| e_5 | 1 | α | 1 | 2 | | | | | -2 |

→ **6A.LÉPÉS:** Megegyezik **2.a) Paramétert nem tartalmazó eset** című fejezetben leírt **6A.LÉPÉS**-sel.

| | a | b | c | d | | a | b | c | e_4 |
|-------|----------|----------|---------|----|-------|----------|----|----|-------|
| e_1 | 3 | 9 | 1 | 5 | e_1 | 3 | | | -5 |
| e_2 | α | 10 | 2 | 2 | e_2 | α | | | -2 |
| e_3 | -1 | 1 | β | -3 | e_3 | -1 | | | 3 |
| e_4 | 0 | -3 | -1 | 1 | d | 0 | -3 | -1 | 1 |
| e_5 | 1 | α | 1 | 2 | e_5 | 1 | | | -2 |

→ **6B.LÉPÉS:** Megegyezik **2.a) Paramétert nem tartalmazó eset** című fejezetben leírt **6B.LÉPÉS**-sel.

$$(9,10,1,\alpha) - (-3) \cdot (5,2,-3,2) = (9,10,1,\alpha) - (-15,-6,9,-6) = (24,16,-8,\alpha+6)$$

| | a | b | c | d | | a | b | c | e ₄ | | a | b | c | e ₄ |
|----------------|----|----|----|----|----------------|----|----|----|----------------|----------------|----|-----|----|----------------|
| e ₁ | 3 | 9 | 1 | 5 | e ₁ | 3 | | | -5 | e ₁ | 3 | 24 | | -5 |
| e ₂ | α | 10 | 2 | 2 | e ₂ | α | | | -2 | e ₂ | α | 16 | | -2 |
| e ₃ | -1 | 1 | β | -3 | e ₃ | -1 | | | 3 | e ₃ | -1 | -8 | | 3 |
| e ₄ | 0 | -3 | -1 | 1 | d | 0 | -3 | -1 | 1 | d | 0 | -3 | -1 | 1 |
| e ₅ | 1 | α | 1 | 2 | e ₅ | 1 | | | -2 | e ₅ | 1 | α+6 | | -2 |

$$(1,2,\beta,1) - (-1) \cdot (5,2,-3,2) = (1,2,\beta,1) - (-5,-2,3,-2) = (6,4,\beta-3,3)$$

| | a | b | c | d | | a | b | c | e ₄ | | a | b | c | e ₄ |
|----------------|----|----|----|----|----------------|----|-----|----|----------------|----------------|----|-----|-----|----------------|
| e ₁ | 3 | 9 | 1 | 5 | e ₁ | 3 | 24 | | -5 | e ₁ | 3 | 24 | 6 | -5 |
| e ₂ | α | 10 | 2 | 2 | e ₂ | α | 16 | | -2 | e ₂ | α | 16 | 4 | -2 |
| e ₃ | -1 | 1 | β | -3 | e ₃ | -1 | -8 | | 3 | e ₃ | -1 | -8 | β-3 | 3 |
| e ₄ | 0 | -3 | -1 | 1 | d | 0 | -3 | -1 | 1 | d | 0 | -3 | -1 | 1 |
| e ₅ | 1 | α | 1 | 2 | e ₅ | 1 | α+6 | | -2 | e ₅ | 1 | α+6 | 3 | -2 |

2-6.LÉPÉSEK elvégzése után a következőképpen néz ki a feladatunk:

| | a | b | c | d | | a | b | c | e ₄ |
|----------------|----|----|----|----|----------------|----|-----|-----|----------------|
| e ₁ | 3 | 9 | 1 | 5 | e ₁ | 3 | 24 | 6 | -5 |
| e ₂ | α | 10 | 2 | 2 | e ₂ | α | 16 | 4 | -2 |
| e ₃ | -1 | 1 | β | -3 | e ₃ | -1 | -8 | β-3 | 3 |
| e ₄ | 0 | -3 | -1 | 1 | d | 0 | -3 | -1 | 1 |
| e ₅ | 1 | α | 1 | 2 | e ₅ | 1 | α+6 | 3 | -2 |

7.LÉPÉS: Az új táblázatról haladunk tovább, mégpedig úgy, hogy a **2-6.LÉPÉSEK**-et addig ismételtjük, ameddig a **2. LÉPÉS**-nél el nem akadunk, azaz valami miatt nem tudunk generáló elemet választani. A példában ez a következőképpen alakul (**2., 3., 4., 5., 6.lépés**):

| | a | b | c | d | | a | b | c | e ₄ | | e ₁ | b | c | e ₄ |
|----------------|----|----|----|----|----------------|----|-----|-----|----------------|----------------|----------------|-------|------|----------------|
| e ₁ | 3 | 9 | 1 | 5 | e ₁ | 3 | 24 | 6 | -5 | e ₁ | 1/3 | 8 | 2 | -5/3 |
| e ₂ | α | 10 | 2 | 2 | e ₂ | α | 16 | 4 | -2 | e ₂ | -α/3 | 16-8α | 4-2α | 5α/3-2 |
| e ₃ | -1 | 1 | β | -3 | e ₃ | -1 | -8 | β-3 | 3 | e ₃ | 1/3 | 0 | β-1 | 4/3 |
| e ₄ | 0 | -3 | -1 | 1 | d | 0 | -3 | -1 | 1 | d | 0 | -3 | -1 | 1 |
| e ₅ | 1 | α | 1 | 2 | e ₅ | 1 | α+6 | 3 | -2 | e ₅ | -1/3 | α-2 | 1 | -1/3 |

| | a | b | c | d | | a | b | c | e ₄ | | e ₁ | b | c | e ₄ | | e ₁ | b | e ₅ | e ₄ |
|----------------|----|----|----|----|----------------|----|-----|-----|----------------|----------------|----------------|-------|------|----------------|----------------|----------------|-------------------------|----------------|----------------|
| e ₁ | 3 | 9 | 1 | 5 | e ₁ | 3 | 24 | 6 | -5 | a | 1/3 | 8 | 2 | -5/3 | a | 1 | 12-2α | -2 | -1 |
| e ₂ | α | 10 | 2 | 2 | e ₂ | α | 16 | 4 | -2 | e ₂ | -α/3 | 16-8α | 4-2α | 5α/3-2 | e ₂ | 4/3-α | 2α ² -16α+24 | 2α-4 | α-2/3 |
| e ₃ | -1 | 1 | β | -3 | e ₃ | -1 | -8 | β-3 | 3 | e ₃ | 1/3 | 0 | β-1 | 4/3 | e ₃ | β/3 | 2β+α-αβ-2 | 1-β | β/3+1 |
| e ₄ | 0 | -3 | -1 | 1 | d | 0 | -3 | -1 | 1 | d | 0 | -3 | -1 | 1 | d | -1/3 | α-5 | 1 | 2/3 |
| e ₅ | 1 | α | 1 | 2 | e ₅ | 1 | α+6 | 3 | -2 | e ₅ | -1/3 | α-2 | 1 | -1/3 | c | -1/3 | α-2 | 1 | -1/3 |

Az **utolsó táblázat**, ahol már nem tudjuk végrehajtani a **2.LÉPÉS**-t az alábbi:

| | a | b | c | d | | a | b | c | e ₄ | | e ₁ | b | c | e ₄ | | e ₁ | b | e ₅ | e ₄ |
|----------------|----|----|----|----|----------------|----|-----|-----|----------------|----------------|----------------|-------|------|----------------|----------------|----------------|-------------------------|----------------|----------------|
| e ₁ | 3 | 9 | 1 | 5 | e ₁ | 3 | 24 | 6 | -5 | a | 1/3 | 8 | 2 | -5/3 | a | 1 | 12-2α | -2 | -1 |
| e ₂ | α | 10 | 2 | 2 | e ₂ | α | 16 | 4 | -2 | e ₂ | -α/3 | 16-8α | 4-2α | 5α/3-2 | e ₂ | 4/3-α | 2α ² -16α+24 | 2α-4 | α-2/3 |
| e ₃ | -1 | 1 | β | -3 | e ₃ | -1 | -8 | β-3 | 3 | e ₃ | 1/3 | 0 | β-1 | 4/3 | e ₃ | β/3 | 2β+α-αβ-2 | 1-β | β/3+1 |
| e ₄ | 0 | -3 | -1 | 1 | d | 0 | -3 | -1 | 1 | d | 0 | -3 | -1 | 1 | d | -1/3 | α-5 | 1 | 2/3 |
| e ₅ | 1 | α | 1 | 2 | e ₅ | 1 | α+6 | 3 | -2 | e ₅ | -1/3 | α-2 | 1 | -1/3 | c | -1/3 | α-2 | 1 | -1/3 |

EZZEL A BÁZISTRANSZFORMÁCIÓ VÉGETÉRT