1.) Adott az alábbi négy mátrix:

$$\underline{A}=\begin{bmatrix}2&3&-1\\1&2&1\\-1&1&1\end{bmatrix}\quad \underline{B}=\begin{bmatrix}3&1&2\\-1&-2&3\\2&1&-1\end{bmatrix}\quad \underline{C}=\begin{bmatrix}2&1&3&1\\1&2&2&3\\-3&-1&1&-2\\0&1&-1&1\end{bmatrix}\quad \underline{D}=\begin{bmatrix}1&2&1&-1\\-2&-1&2&3\\3&1&2&1\\1&3&1&2\end{bmatrix}$$

Határozd meg a következő determinánsok értékét!

a) $|\underline{A}\cdot\underline{B}^{-1}|=$ b) $|\underline{C}^2|=$ c) $|\underline{B}\cdot(\underline{A}^{-1})^2|=$ d) $|\frac{1}{5}\cdot\underline{D}^2|=$

2.) Adott az alábbi két mátrix:

$$\underline{A}=\begin{bmatrix}\beta&\alpha&-2\\-3&0&-11\\2&3&-1\end{bmatrix}\qquad \underline{B}=\begin{bmatrix}-5&2&0&1\\0&\beta&2&3\\2&-3&-4&-6\\1&\alpha&5&7\end{bmatrix}$$

a) Határozd meg α és β értékét úgy, hogy mindkét mátrix szinguláris legyen!

b) Határozd meg mindkét mátrix inverzét $\alpha=2$ és $\beta=1$ esetén!

3.) Adott az alábbi mátrix:

$$\underline{A}=\begin{bmatrix}-1&\alpha+3&2\\1&\alpha-1&-1\\\alpha+1&0&1\end{bmatrix}$$

a) Határozd meg α értékét úgy, hogy a $2\underline{A}^3-3\underline{A}$ mátrix egyik sajátértéke $\emptyset$ legyen

b) Határozd meg a $2\underline{A}^3-3\underline{A}$ mátrix 0-tól különböző sajátértékeit!

4.) Adott az alábbi két mátrix:

$$\underline{A}=\begin{bmatrix}3&0&-2\\-2&-1&1\\2&2&0\end{bmatrix}\qquad \underline{B}=\begin{bmatrix}-1&-1&5\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

Határozd meg a mátrixok sajátértékeit, sajátvektorait és diagonalizált alakjukat!

5.) Adott az alábbi mátrix:

$$\underline{A}=\begin{bmatrix}6&4&-2\\-3&-2&1\\9&6&-3\end{bmatrix}$$

Határozd meg $\underline{A}^{100}$ mátrixot!

6.) Adott az alábbi mátrix és vektor:

$$\underline{A}=\begin{bmatrix}\alpha&1&1\\-1&\beta&1\\\gamma&-1&\alpha\end{bmatrix}\qquad \underline{x}=\begin{bmatrix}\beta\\2\\1\end{bmatrix}$$

Határozd meg a paramétereket úgy, hogy az $\underline{x}$ vektor az $\underline{A}$ mátrix $\lambda=2$ sajátértékhez tartozó sajátvektora legyen!

7.) Adott az alábbi mátrix és két vektor :

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} \alpha & -1 & 1 \\ -1 & 2 & \beta \\ -1 & \gamma & 0 \end{bmatrix} \qquad \underline{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \underline{y} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

a) Határozd meg a paramétereket úgy, hogy mindkét vektor az $\underline{A}$ mátrix sajátvektora legyen

b) Határozd meg a $\underline{B} = 2\underline{A}^3 - 3\underline{A}^2 + 3\cdot\underline{A}^{-1}$ mátrix sajátértékeit !

c) Határozd meg $\underline{A}^{10}$ mátrixot !

8.) Határozd meg az alábbi mátrixok definitségét !

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ -2 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & -3 & 2 & -1 \\ 5 & 1 & -3 & 2 \end{bmatrix} \qquad \underline{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & 2 \end{bmatrix} \qquad \underline{C} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 4 & 5 \end{bmatrix} \qquad \underline{D} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

MEGOLDÁSOK :

1a) $-7/8$ 1b) 256 1c) $8/49$ 1d) $4624/625$ 2a) $\alpha = 93/32$ és $\beta = 53/32$

2b) $\underline{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 33 & -4 & -22 \\ -25 & 3 & 17 \\ -9 & 1 & 6 \end{bmatrix}$ $\underline{B}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 & -2 \\ -2 & 4 & -3 & -4 \\ 1 & -12 & 0 & 5 \\ 0 & 7 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ 3a) $\alpha = -1$ 3b) $\lambda = -1$ és $\lambda = -45$

4.) „$\underline{A}$" sajátértékei : $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = -1$ „$\underline{A}$" sajátvektorai : $\alpha\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$; $\beta\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\gamma\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

ahol $\alpha, \beta, \gamma \neq 0$ diagonalizált alak : $\underline{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

„$\underline{B}$" sajátértékei : $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$ „$\underline{B}$" sajátvektorai : $\alpha\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ahol $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$

és $\gamma\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ahol $\gamma \neq 0$ diagonalizált alak: $\underline{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

5.) A mátrix 100-dik hatványa éppen önmaga, azaz $\underline{A}^{100} = \underline{A}$

6) $\alpha = 1$, $\beta = 3$, $\gamma = 1$ 7a) $\alpha = 2$, $\beta = -1$, $\gamma = 1$ 7b) 2 és $11/2$

7c) $\underline{A}^{10} = \begin{bmatrix} 1024 & -1023 & 1023 \\ -1023 & 1024 & -1023 \\ -1023 & 1023 & -1022 \end{bmatrix}$ 8) $\underline{A}$ = poz. def $\underline{B}$ = indefinit $\underline{C}$ = poz. szemidef $\underline{D}$ = poz. szemi