JÁTÉKELMÉLETTEL KAPCSOLATOS FELADATOK

1.Feladat

Az alábbi kifizetőmátrixok három különböző kétszemélyes konstans összegű játék sorjátékosának eredményeit mutatják:

A)

2	1	0	2	2
0	0	1	0	1
2	1	1	0	2
1	2	2	0	3
4	2	1	3	2

B)

4	2	3	2	4
5	3	4	3	6
7	0	2	1	8
0	1	4	2	7
6	3	5	3	5

C)

5	2	4	4	5
1	2	3	1	2
3	5	5	3	4
2	3	4	1	4
0	2	2	0	2

a) Létezik-e a fenti három játék esetén egyensúlyi pont, ha igen, akkor mely stratégiapárok esetén?

b) Ha nem létezik egyensúlyi pont, határozd meg a domináns/dominált stratégiapárokat és csökkentsd a mátrixok méretét!

c) Ha nem létezik egyensúlyi pont, határozd meg, hogy az egyes játékosok a különböző stratégiákat milyen valószínűségekkel választják és készíts grafikont!

d) Határozd meg a játék értékét mindhárom esetben!

2.Feladat

Az alábbi mátrix egy kétszemélyes nem konstans összegű játék kifizetőmátrixát jeleníti meg a szokásos formában:

(55;80)	**(50;70)**	**(45;75)**
(60;40)	**(60;50)**	**(50;30)**
(65;70)	**(55;65)**	**(80;60)**

a) Létezik-e egyensúlyi pont, ha igen, mely stratégiapárok esetén ?

b) Határozd meg az egyensúlyi pontok esetén a játékosok által elérhető eredményt!

3.Feladat

Egy négyszemélyes játék karakterisztikus függvénye az alábbiak szerint alakul:

$\nu(\{1, 2, 3\}) = \nu(\{1, 2, 4\}) = \nu(\{1, 3, 4\}) = \nu(\{2, 3, 4\}) = 75$
$\nu(\{1, 2, 3, 4\}) = 100$ és $\nu(\{3, 4\}) = 60$
$\nu(S) = 0$ minden egyéb koalícióra

a) Elosztásnak tekinthető-e az (50;0;40;10) kifizetésvektor ?

b) A (15;25;40;20) kifizetésvektor benne van-e a játék magjában ?

c) Kimutatható e domináns/dominált kapcsolat a (20;70;0;10) és a (30;40;30;0) kifizetésvektorok között és ha igen, mely koalíción keresztül ?

d) Számítsd ki a játék Shapley-értékét és ellenőrizd, hogy az érték benne van-e a játék magjában !

4.Feladat

Egy háromszemélyes játék karakterisztikus függvénye az alábbiak szerint alakul:

$\nu(\emptyset) = 0$ és $\nu(\{1\}) = 0{,}2$ és $\nu(\{2\}) = \nu(\{3\}) = 0$
$\nu(\{1, 2\}) = 1{,}5$ és $\nu(\{1, 3\}) = 1{,}6$ és $\nu(\{2, 3\}) = 1{,}8$
$\nu(\{1, 2, 3\}) = 2$

a) Elosztásnak tekinthető-e az (0,1;0,9;1) kifizetésvektor ?

b) Kimutatható e domináns/dominált kapcsolat a (0,5;1;0,5) és a (0,3;0,8;0,9) kifizetésvektorok között és ha igen, mely koalíción keresztül ?

c) Számítsd ki a játék Shapley-értékét és ellenőrizd, hogy az érték benne van-e a játék magjában !

5.Feladat

Az 1-es játékos egy 1 és 20 közötti számot ír fel egy papírra úgy, hogy azt a 2-es játékos ne lássa, majd közli vele, hogy mit írt fel, megengedve a hazugságot is. A 2-es játékos ezután tippel, hogy igazat mondott-e az 1-es vagy hazudott. Amennyiben a 2-es eltalálja, hogy az 1-es hazudott, az 1-es 100 Ft-ot fizet neki, ha viszont igaztalanul vádolja hazugsággal, akkor ő fizet az 1-es játékosnak 50 Ft-ot. Ugyanakkor, ha a 2-es eltalálja, hogy az 1-es igazat mondott, az 1-es 10 Ft-ot fizet neki, míg ha a 2-es hibásan állítja, hogy az 1-es igazat mondott, ő fizet az 1-esnek 50 Ft-ot.

a) Írd fel a játék kifizetőmátrixát mind az 1-es, mind a 2-es játékos szempontjából!

b) Határozd meg a játékosok optimális stratégiáit és a játék értékét, készíts grafikont is!

6.Feladat

Két versenytárs vállalatnak egyidejűleg kell meghatároznia, hogy mennyit termeljenek egy adott termékből. Az elérhető össznyereség mindig 100 millió forint. Ha mindkét vállalat alacsony szinten termel, akkor az 1-es nyeresége 50 millió Ft, míg ha mindketten magas szinten termelnek, akkor az 1-es nyeresége 60 millió Ft. Ha az 1-es vállalat termelési szintje alacsony, de a 2-es vállalaté magas, akkor az 1-es nyeresége 40 millió Ft, míg fordított helyzetben csak 30 millió Ft.

a) Írd fel a játék kifizetőmátrixát mind az 1-es, mind a 2-es játékos szempontjából!

b) Határozd meg a játékosok optimális stratégiáit és a játék értékét, készíts grafikont is!

7.Feladat

Végrendeletében Pista bácsi 20 millió Ft-ot hagyott három volt felesége támogatására, de nem részletezte az összeg felosztását. Az ügyvéd megállapítása szerint a volt feleségeknek a gyermekek felneveléséhez az alábbi öszegekre lenne szükségük: első feleség 10 millió Ft, második feleség 20 millió Ft, harmadik feleség 30 millió Ft. Az ügyvédnek döntenie kell az összeg felosztásáról, ezért úgy definiálja a volt feleségek egy S koalíciójának az értékét, mint azt az összeget, ami azután marad, hogy az S-be nem tartozó feleségek teljes egészében megkapják a számukra szükséges pénzt, illetve ha ez az összeg negatív, akkor a koalíció értéke nulla.

a) Írd fel a játék karakterisztikus függvényét!

b) Kimutatható e domináns/dominált kapcsolat a (13;4;3) és a (11;4;5) kifizetésvektorok között és ha igen, mely koalíción keresztül ?

c) Számítsd ki és értelmezd a játék Shapley-értékét és ellenőrizd, hogy az érték benne van-e a játék magjában !

8.Feladat

Egy vállalat összes részvényét 3 személy birtokolja. Az 1-es személy 1%, a 2-es személy 49%, a 3-as személy 50% részesedéssel rendelkezik. Egy határozat elfogadásához a részvények legalább 51%-ára van szükség. Egy koalíció értéke 1, ha el tud fogadni egy határozatot, míg 0, ha nem.

a) Írd fel a játék karakterisztikus függvényét!

b) Számítsd ki és értelmezd a játék Shapley-értékét!

MEGOLDÁSOK

1.Feladat

a) Az ábráról leolvasható, hogy az **A)** és **C) játék**ok esetén **nincs nyeregpont**, míg a **B) játék** esetében **4 nyeregpont** is létezik.

A)

2	1	0	2	2	0
0	0	1	0	1	0
2	1	1	0	2	0
1	2	2	0	3	0
4	2	1	3	2	1
4	2	2	3	3	

B)

4	2	3	2	4	2
5	3	4	3	6	3
7	0	2	1	8	0
0	1	4	2	7	0
6	3	5	3	5	3
7	3	5	3	8	

C)

5	2	4	4	5	2
1	2	3	1	2	1
3	5	5	3	4	3
2	3	4	1	4	1
0	2	2	0	2	0
5	5	5	4	5	

b) Az ábrákon piros színnel a domináns, zöld színnel a dominált startégiák láthatók (**más megoldás is lehetséges, de a végső mátrix ugyanez kell legyen**)

A)

2	1	0	2	2
0	0	1	0	1
2	1	1	0	2
1	2	2	0	3
4	2	1	3	2

0	0	1	0	1
2	1	1	0	2
1	2	2	0	3
4	2	1	3	2

0	1	0	1
1	1	0	2
2	2	0	3
2	1	3	2

1	1	0	2
2	2	0	3
2	1	3	2

1	0	2
2	0	3
1	3	2

2	0	3
1	3	2

2	0
1	3

C)

5	2	4	4	5
1	2	3	1	2
3	5	5	3	4
2	3	4	1	4
0	2	2	0	2

5	2	4	4	5
3	5	5	3	4
2	3	4	1	4
0	2	2	0	2

2	4	4	5
5	5	3	4
3	4	1	4
2	2	0	2

2	4	4	5
5	5	3	4
3	4	1	4

2	4	5
5	3	4
3	1	4

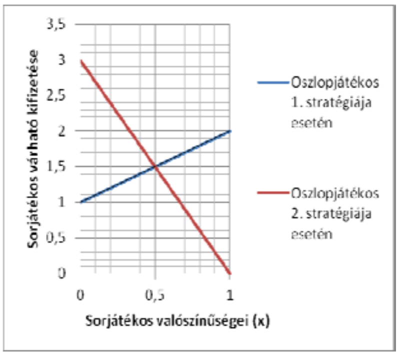
2	4	5
5	3	4

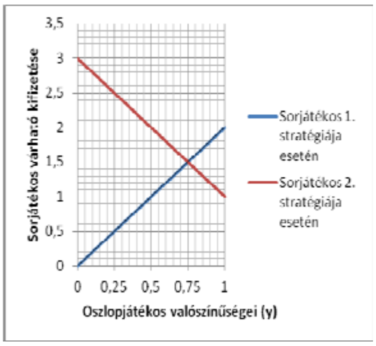
2	4
5	3

c) Kevert stratégiák kiszámítása az **A) és C) játék**ok esetén:

A) játék: $2x + 1(1-x) = 1+x$ és $0x + 3(1-x) = 3-3x$ → $1+x = 3-3x$ → $x=0,5$ és $1-x=0,5$ → **a sorjátékos mindkét stratégiáját 0,5 valószínűséggel választja**

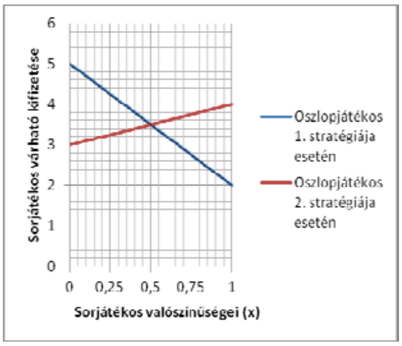
$2y + 0(1-y) = 2y$ és $1y + 3(1-y) = 3-2y$ → $2y = 3-2y$ → $y=0,75$ és $1-y=0,25$ → **az oszlopjátékos az 1. stratégiáját 0,75 a 2. stratégiáját pedig 0,25 valószínűséggel választja**

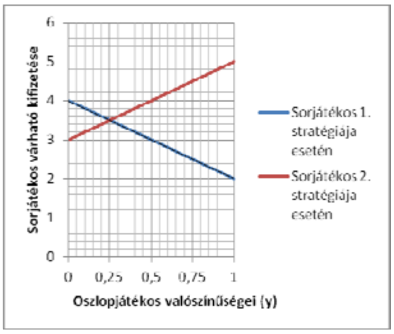




C) játék: $2x + 5(1-x) = 5-3x$ és $4x + 3(1-x) = 3+x$ → $5-3x = 3+x$ → $x=0,5$ és $1-x=0,5$ → **a sorjátékos mindkét stratégiáját 0,5 valószínűséggel választja**

$2y + 4(1-y) = 4-2y$ és $5y + 3(1-y) = 3+2y$ → $4-2y = 3+2y$ → $y=0,25$ és $1-y=0,75$ → **az oszlopjátékos az 1. stratégiáját 0,25 a 2. stratégiáját pedig 0,75 valószínűséggel választja**





d) A játék értékének meghatározása a kiszámított valószínűségek felhasználásával:

A)

			Valószínűségek	
			0,75	**0,25**
2	**0**	**0,5**	**3/8**	**1/8**
1	**3**	**0,5**	**3/8**	**1/8**

Érték: 2*(3/8)+1*(3/8)+0*(1/8)+3*(1/8)=1,5

B) **Érték: 3**

C)

			Valószínűségek	
			0,25	**0,75**
2	**4**	**0,5**	**1/8**	**3/8**
5	**3**	**0.5**	**1/8**	**3/8**

Érték: 2*(1/8)+4*(3/8)+5*(1/8)+3*(3/8)=3,5

2.Feladat

a) A **nyeregpont**okat az alábbi táblázat szemlélteti:

(55;80)	**(50;70)**	**(45;75)**
(60;40)	**(60;50)**	**(50;30)**
(65;70)	**(55;65)**	**(80;60)**

b) Az eredményeket a nyeregpontokban található számértékek mutatják (**első szám a sorjátékos**, a **második szám az oszlopjátékos kifizetése**)

3.Feladat

a) Elosztás, mert teljesül a $\sum x_i = v(N)$ (50+0+40+10=100) **és** bármely x_i esetén az $x_i \geq v(i)$ (50≥ 0 ; 0≥ 0 ; 40≥ 0 ; 10≥ 0)

b) Nincs benne a magban, mert **elosztás** ugyan ($\sum x_i = v(N)$ 15+25+40+20=100 **és** $x_i \geq v(i)$ 15≥ 0és 25≥ 0 és 40≥ 0 és 20≥ 0), **de** nem teljesül bármely S esetén a $\sum x_i \geq v(S)$ ha $i \in S$ (15+25+40≥75 ; **15+25+20≥75** ; 25+40+20≥75 ; 15+40+20≥75 ; 15+25≥0 ; 15+40≥0 ; 15+20≥0 ; 25+40≥0 ; 25+20≥0 ; 40+20≥60)

c) Legyen **x=(20;70;0;10)** és **y=(30;40;30;0)**. Az alábbi táblázat a lehetséges koalíciók kifizetéseit mutatja az előbbi két kifizetésvektor szerint (a lehetséges domináns/dominált párok zölddel kiemelve):

Koalíció	x vektor	y vektor	$x_i>y_i$ vagy $x_i<y_i$ teljesülése minden x_i és y_i értékre
{1, 2}	(20;70)	(30;40)	20<30 és 70>40 ezért nem teljesül
{1, 3}	(20;0)	(30;30)	20<30 és 0<30 ezért teljesül
{1, 4}	(20;10)	(30;0)	20<30 és 10>0 ezért nem teljesül
{2, 3}	(70;0)	(40;30)	70>40 és 0<30 ezért nem teljesül
{2, 4}	(70;10)	(40;0)	70>40 és 10>0 ezért teljesül
{3, 4}	(0;10)	(30;0)	0<30 és 10>0 ezért nem teljesül
{1, 2, 3}	(20;70;0)	(30;40;30)	20<30 és 70>40 ezért nem teljesül
{1, 2, 4}	(20;70;10)	(30;40;0)	20<30 és 70>40 ezért nem teljesül
{1, 3, 4}	(20;0;10)	(30;30;0)	20<30 és 0<30 és 10>0 ezért nem teljesül
{2, 3, 4}	(70;0;10)	(40;30;0)	70>40 és 0<30 ezért nem teljesül

A táblázat alapján azt kapjuk, hogy **y dominálhatja x vektort az {1, 3} koalíción keresztül**, illetve **x dominálhatja y vektort a {2, 4} koalíción keresztül**, tehát ezeket a lehetőségeket vizsgáljuk tovább. A domináns vektor (pirossal kiemelve) kifizetéseire teljesülnie kell a **$\sum x_i \leq v(S)$** ha **i€S** vagy a **$\sum y_i \leq v(S)$** ha **i€S** összefüggésnek. Tehát $30+30 \leq v(\{1,3\})$ illetve $70+10 \leq v(\{2,4\})$ összefüggéseknek kellene teljesülniük a domináns/dominált kapcsolat fennállása érdekében. Miután ezek egyike sem áll fenn, a domináns/dominált kapcsolatok lehetőségét az előbbi két esetben elvethetjük, ezért a **x=(20;70;0;10) és y=(30;40;30;0) vektorok között nem áll fenn domináns/dominált kapcsolat**.

d) A Shapley-érték kiszámításához szükséges táblázat a következő:

Sorrend	m_1	m_2	m_3	m_4
1234	0	0	75	25
1243	0	0	25	75
1324	0	75	0	25
1342	0	25	0	75
1423	0	75	25	0
1432	0	25	75	0
2134	0	0	75	25
2143	0	0	25	75
2314	75	0	0	25
2341	25	0	0	75
2431	25	0	75	0
2413	75	0	25	0
3124	0	75	0	25
3142	0	25	0	75
3241	25	0	0	75
3214	75	0	0	25
3412	15	25	0	60
3421	25	15	0	60
4123	0	75	25	0
4132	0	25	75	0
4231	25	0	75	0
4213	75	0	25	0
4321	25	15	60	0
4312	15	25	60	0
Átlag	**480/24=20**	**480/24=20**	**720/24=30**	**720/24=30**

A Shapley-érték tehát az x=(20;20;30;30) kifizetésvektor.

Nincs benne a magban, **mert nem teljesül** bármely S esetén a **$\sum x_i \geq v(S)$** ha **i€S** (**20+20+30≥75** ; **20+20+30≥75** ; 20+30+30≥75 ; 20+30+30≥75 ; 20+20≥0 ; 20+30≥0 ; 20+30≥0 ; 20+30≥0 ; 20+30≥0 ; 30+30≥60)

4.Feladat

a) Nem elosztás, **mert** ugyan **teljesül** a **$\sum x_i = v(N)$** (0,1+0,9+1=2), **de nem teljesül** bármely x_i esetén az **$x_i \geq v(i)$** (**0,1≥ 0,2** ; 0,9≥ 0 ; 1≥ 0)

b) Legyen **x=(0,5;1;0,5)** és **y=(0,3;0,8;0,9)**. Az alábbi táblázat a lehetséges koalíciók kifizetéseit mutatja az előbbi két kifizetésvektor szerint (a lehetséges dominins/dominált párok zölddel kiemelve):

Koalíció	x vektor	y vektor	$x_i>y_i$ vagy $x_i<y_i$ teljesülése minden x_i és y_i értékre
{1, 2}	**(0,5;1)**	**(0,3;0,8)**	**0,5>0,3 és 1>0,8 ezért teljesül**
{1, 3}	**(0,5;0,5)**	**(0,3;0,9)**	**0,5>0,3 és 0,5<0,9 ezért nem teljesül**
{2, 3}	**(1;0,5)**	**(0,8;0,9)**	**1>0,8 és 0,5<0,9 ezért nem teljesül**

A táblázat alapján azt kapjuk, hogy **x dominálhatja y vektort az {1, 2} koalíción keresztül**, tehát ezt a lehetőséget vizsgáljuk tovább. A domináns vektor (pirossal kiemelve) kifizetéseire teljesülnie kell a **$\sum x_i \leq v(S)$** ha **i€S** összefüggésnek. Tehát $0,5+1 \leq v(\{1,2\})$ összefüggésnek kellene teljesülnie a domináns/dominált kapcsolat fennállása érdekében. Miután ez teljesül, az **x=(0,5;1;0,5) dominálja az y=(0,3;0,8;0,9) vektort az {1, 2} koalíción keresztül**.

c) A Shapley-érték kiszámításához szükséges táblázat a következő:

Sorrend	m_1	m_2	m_3
123	0,2	1,3	0,5
132	0,2	0,4	1,4
231	0,2	0	1,8
213	1,5	0	0,5
312	1,6	0,4	0
321	0,2	1,8	0
Átlag	**3,9/6=0,65**	**3,9/6=0,65**	**4,2/6=0,7**

A Shapley-érték tehát az x=(0,65;0,65;0,7) kifizetésvektor.

Nincs benne a magban, **mert nem teljesül** bármely S esetén a **$\sum x_i \geq v(S)$** ha **i€S** (**0,65+0,65≥1,5** ; **0,65+0,7≥1,6** ; **0,65+0,7≥1,8**)

5.Feladat

a) A játékosok kifizetőmátrixai az alábbiak (**zéró összegű játék**ról van szó, ezért a mátrixok **egymás -1-szeresei**):

SORJÁTÉKOS KIFIZETÉSEI

	igaz tipp	hazug tipp
igazat mond	-10	50
hazudik	50	-100

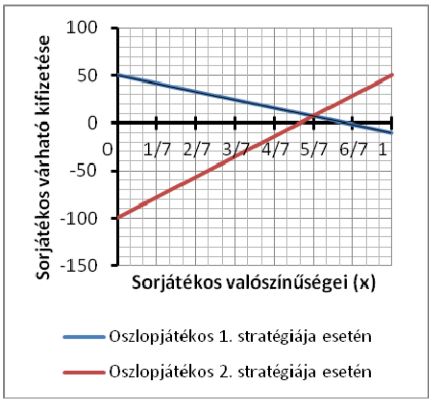
OSZLOPJÁTÉKOS KIFIZETÉSEI

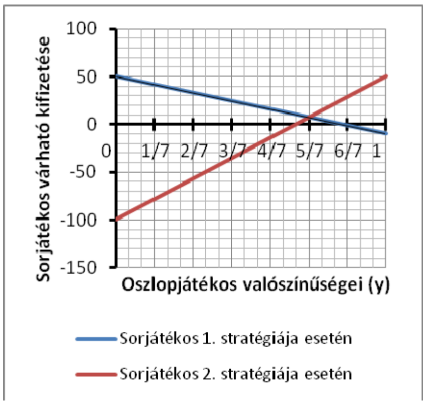
	igaz tipp	hazug tipp
igazat mond	10	-50
hazudik	-50	100

b) A feladat megoldása a **sorjátékos kifizetőmátrixa alapján** a következő:

$-10x + 50(1-x) = 50-60x$ és $50x - 100(1-x) = 150x-100$ → $50-60x = 150x-100$ → $x=5/7$ és $1-x=2/7$ → **a sorjátékos 5/7 valószínűséggel igazat mond, míg 2/7 valószínűséggel hazudik**

$-10y + 50(1-y) = 50-60y$ és $50y - 100(1-y) = 150y-100$ → $50-60y = 150y-100$ → $y=5/7$ és $1-y=2/7$ → **az oszlopjátékos 5/7 valószínűséggel igazat tippel, míg 2/7 valószínűséggel hazugságot**





Kifizetőmátrix

-10	50
50	-100

Valószínűségek

	5/7	2/7
5/7	25/49	10/49
2/7	10/49	4/49

Érték: -10*(25/49)+50*(10/49)+50*(10/49)-100*(4/49)=350/49

6.Feladat

a) A játékosok kifizetőmátrixai az alábbiak (**konstans összegű játék**ról van szó, ezért a **két mátrix ugyanazon helyén lévő elemeinek összege 100**):

SORJÁTÉKOS KIFIZETÉSEI

	alacsony	magas
alacsony	50	40
magas	30	60

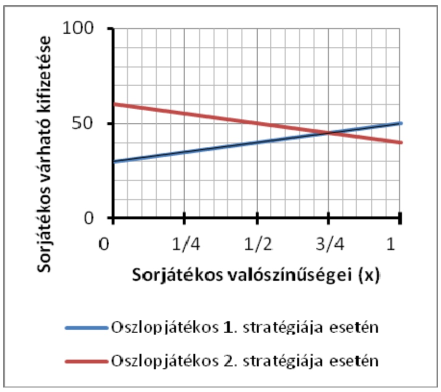
OSZLOPJÁTÉKOS KIFIZETÉSEI

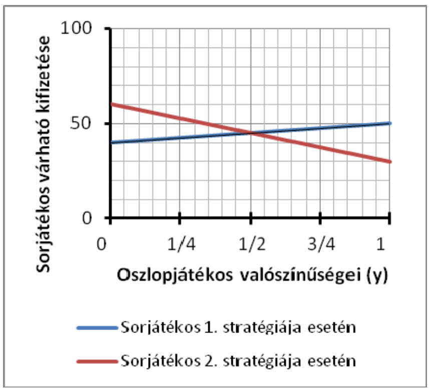
	alacsony	magas
alacsony	50	60
magas	70	40

b) A feladat megoldása a **sorjátékos kifizetőmátrixa alapján** a következő:

$50x + 30(1-x) = 30+20x$ és $40x + 60(1-x) = 60-20x$ → $30+20x = 60-20x$ → $x=0{,}75$ és $1-x=0{,}25$ → **a sorjátékos 0,75 valószínűséggel alacsony szinten, míg 0,25 valószínűséggel magas szinten termel**

$50y + 40(1-y) = 40+10y$ és $30y + 60(1-y) = 60-30y$ → $40+10y = 60-30y$ → $y=0{,}5$ és $1-y=0{,}5$ → **az oszlopjátékos az alacsony és magas szinten történő termelést egyaránt 0,5 valószínűséggel választja**





Kifizetőmátrix

50	40
30	60

Valószínűségek

	0,5	0,5
0,75	3/8	3/8
0,25	1/8	1/8

Érték: 50*(3/8)+40*(3/8)+30*(1/8)+60*(1/8)=45

7.Feladat

a) A játék **karakterisztikus függvény**e a következő:

$v(\emptyset) = v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = v(\{1, 2\}) = v(\{1, 3\}) = 0$ és $v(\{2, 3\}) = 10$ és $v(\{1, 2, 3\}) = 20$

b) Legyen **x=(13;4;3)** és **y=(11;5;4)**. Az alábbi táblázat a lehetséges koalíciók kifizetéseit mutatja az előbbi két kifizetésvektor szerint (a lehetséges dominráns/dominált párok zölddel kiemelve):

Koalíció	x vektor	y vektor	$x_i>y_i$ vagy $x_i<y_i$ teljesülése minden x_i és y_i értékre
{1, 2}	(13;4)	(11;5)	13>11 és 4<5 ezért nem teljesül
{1, 3}	(13;3)	(11;4)	13>11 és 3<4 ezért nem teljesül
{2, 3}	(4;3)	(5;4)	4<5 és 3<4 ezért teljesül

A táblázat alapján azt kapjuk, hogy **y dominálhatja x vektort a {2, 3} koalíción keresztül**, tehát ezt a lehetőséget vizsgáljuk tovább. A domináns vektor (pirossal kiemelve) kifizetéseire teljesülnie kell a **$\sum x_i \leq v(S)$** ha **$i \in S$** összefüggésnek. Tehát $5+4 \leq v(\{2,3\})$ összefüggésnek kellene teljesülnie a domináns/dominált kapcsolat fennállása érdekében. Miután ez teljesül, az **y=(11;5;4) dominálja az x=(13;4;3) vektort a {2, 3} koalíción keresztül**.

c) A Shapley-érték kiszámításához szükséges táblázat a következő:

Sorrend	m_1	m_2	m_3
123	0	0	20
132	0	20	0
231	10	0	10
213	0	0	20
312	0	20	0
321	10	10	0
Átlag	**10/3**	**25/3**	**25/3**

A Shapley-érték tehát az x=(10/3;25/3;25/3) kifizetésvektor, mely megmutatja, hogy az ügyvéd hogyan osztja szét a 20 millió dollárt a feleségek között.

Benne van a magban, **mert teljesül** bármely S esetén a **$\sum x_i \geq v(S)$** ha **$i \in S$** ($10/3+25/3 \geq 0$; $10/3+25/3 \geq 0$; $25/3+25/3 \geq 10$)

8.Feladat

a) A játék **karakterisztikus függvény**e a következő:

$v(\emptyset) = v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = v(\{1, 2\}) = 0$ és $v(\{1, 3\}) = v(\{2, 3\}) = v(\{1, 2, 3\}) = 1$

b) A Shapley-érték kiszámításához szükséges táblázat a következő:

Sorrend	m_1	m_2	m_3
123	0	0	1
132	0	0	1
231	0	0	1
213	0	0	1
312	1	0	0
321	0	1	0
Átlag	**1/6**	**1/6**	**2/3**

A Shapley-érték tehát az x=(1/6;1/6;2/3) kifizetésvektor, mely megmutatja, hogy amennyiben egy adott részvényes támogat egy határozatot, az milyen valószínűséggel kerül elfogadásra a szavazás során.

Nincs benne a magban, **mert nem teljesül** bármely S esetén a **$\sum x_i \geq v(S)$** ha **$i \in S$** ($1/6+1/6 \geq 0$; **$1/6+2/3 \geq 1$** ; **$1/6+2/3 \geq 1$**)