LINEÁRIS PROGRAMOZÁSI FELADATOK MEGOLDÁSA SZIMPLEX MÓDSZERREL

$$\begin{array}{rcl}
x_1, x_2, x_3 & \geq & 0 \\
x_1 - 2x_2 & \leq & 6 \\
-x_1 \quad\quad - 3x_3 & = & -7 \\
x_1 - x_2 - 3x_3 & \leq & -2 \\
3x_1 - 2x_2 - 2x_3 & \leq & 4 \\
\hline
4x_1 - 2x_2 + x_3 & \rightarrow & \max
\end{array}$$

Alapfogalmak: feltételrendszer (**narancs színnel jelölve**), célfüggvény (**kék színnel jelölve**), előjelkorlát (**szürke színnel jelölve**)

1. LÉPÉS: Amelyik feltétel (**narancs szín**) jobboldalán negatív szám áll, azt a feltételt **-1**-gyel be kell szorozni (ekkor a relációs jel megfordul)

$$\begin{array}{rcl}
x_1, x_2, x_3 & \geq & 0 \\
x_1 - 2x_2 & \leq & 6 \\
-x_1 \quad\quad - 3x_3 & = & -7 \\
x_1 - x_2 - 3x_3 & \leq & -2 \\
3x_1 - 2x_2 - 2x_3 & \leq & 4 \\
\hline
4x_1 - 2x_2 + x_3 & \rightarrow & \max
\end{array}$$

szorozni kell -1-gyel, ekkor $x_1 \quad + 3x_3 = 7$

szorozni kell -1-gyel, ekkor $-x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 2$

Az **1.LÉPÉS** végrehajtása után tehát a feladat a következő alakot ölti:

$$\begin{array}{rcl}
x_1, x_2, x_3 & \geq & 0 \\
x_1 - 2x_2 & \leq & 6 \\
x_1 \quad\quad + 3x_3 & = & 7 \\
-x_1 + x_2 + 3x_3 & \geq & 2 \\
3x_1 - 2x_2 - 2x_3 & \leq & 4 \\
\hline
4x_1 - 2x_2 + x_3 & \rightarrow & \max
\end{array}$$

A feladat megoldása erről az alakról folytatódik.

2.LÉPÉS: Induló szimplex táblázatot készítünk az alábbiak figyelembevételével:

Fogalmak:

→ **együtthatómátrix**: a feltételrendszer baloldalán szereplő, az *x*-ek szorzószámai alkotta mátrix (ahol a szám nincs kiírva az *x* elé, ott 1-es vagy -1-es szerepel, ahol nincsen *x*, ott 0 szerepel a mátrixban)

→ ***b* vektor**:a feltételrendszer jobboldalán álló számok alkotta oszlopvektor

$$\begin{array}{rcl}
x_1, x_2, x_3 & \geq & 0 \\
x_1 - 2x_2 & \leq & 6 \\
x_1 \quad\quad + 3x_3 & = & 7 \\
-x_1 + x_2 + 3x_3 & \geq & 2 \\
3x_1 - 2x_2 - 2x_3 & \leq & 4 \\
\hline
3x_1 - 4x_2 - 7x_3 & \rightarrow & \max
\end{array}$$

az együtthatómátrix tehát:

$$\begin{array}{rrr}
1 & -2 & 0 \\
1 & 0 & 3 \\
-1 & 1 & 3 \\
3 & -2 & -2
\end{array}$$

a *b* vektor pedig:

$$\begin{array}{r}
6 \\
7 \\
2 \\
4
\end{array}$$

→ ***u* vektor**: a feltételrendszer mindegyik feltételéhez tartozik egy $\boldsymbol{u_i}$ eltérésváltozó (u_1 az első, u_2 a második stb. feltételhez tartozik, tehát annyi db *u* változó, ahány feltételünk van), a **………… = pozitív szám** és **a ………….. ≥ pozitív szám** alakú feltételekhez tartozó *u* betűt *–gal látjuk el (a példában u_1, u_2*, u_3*, u_4)

→ ***v* vektor**: a feltételrendszer mindegyik **………….. ≥ pozitív szám** alakú feltételéhez tartozik a korábban említett *u* változón kívül egy $\boldsymbol{v_i}$ eltérésváltozó (*i* betű azt mutatja meg, hogy hányadik feltétel ilyen alakú, a példában v_3, mert a 3. feltétel **………….. ≥ pozitív szám** alakú)

$$\begin{array}{rcl}
x_1, x_2, x_3 & \geq & 0 \\
x_1 - 2x_2 & \leq & 6 \\
x_1 \quad\quad + 3x_3 & = & 7 \\
-x_1 + x_2 + 3x_3 & \geq & 2 \\
3x_1 - 2x_2 - 2x_3 & \leq & 4 \\
\hline
4x_1 - 2x_2 + x_3 & \rightarrow & \max
\end{array}$$

az *u* vektor tehát:

$$\begin{array}{c}
u_1 \\
u_2^* \\
u_3^* \\
u_4
\end{array}$$

a *v* vektor pedig: (v_3)

→ ***x* vektor** : a feladatban szereplő *x*-ek alkotta sorvektor (annyi db x_i, ahány db szerepel a feladatban, a példában x_1, x_2, x_3)

a példában az ***x* vektor tehát**: (x_1, x_2, x_3)

→ ***c* vektor** : a célfüggvényben szereplő szorzószámok alkotta sorvektor (ahol a szám nincs kiírva az *x* elé, ott 1-es vagy -1-es szerepel, ahol nincsen *x*, ott 0 szerepel a vektorban), a példában a célfüggvény:

$4x_1 - 2x_2 + x_3 \rightarrow \max$ ***c* vektor tehát**: **(4,-2, 1)**, ennek -1-szerese a **-1*c* vektor pedig: (-4, 2, -1)**

Az **induló szimplex táblázat** elkészítésének lépései a következők:

2A.LÉPÉS: a táblázat tetejére először felírjuk az **x vektor**t, mellé a **v vektor**t (erre csak akkor van szükség, ha a feltételrendszer tartalmaz **………….. ≥ pozitív szám** alakú feltételt), majd a legfelső sor végére mindig **b** betűt írunk.

	x vektor	**v vektor**	**b**

a példában szereplő adatokkal pedig:

	x_1	x_2	x_3	v_3	**b**

2B.LÉPÉS: a táblázat bal szélére először felírjuk az **u vektor** komponenseit egymás alá, ezek alá a következő kockába max feladatnál **–z**, min feladatnál **z** kerül (példánk max feladat, ezért **–z**), végül **±z** alá **-z***-ot írunk (erre csak akkor van szükség, ha az **u vektor**ban vannak u^* komponensek, a példánkban szükséges).

	x vektor	**v vektor**	**b**
u			
±z			
-z*			

a példában szereplő adatokkal pedig:

	x_1	x_2	x_3	v_3	**b**
u_1					
u_2^*					
u_3^*					
u_4					
–z					
-z*					

2C.LÉPÉS: a táblázatba az **x vektor** alá, az **u vektor**tól jobbra bemásoljuk az **együtthatómátrix** számadatait, ezek alá a **±z** sorba max feladatnál **c vektor**, min feladatnál **-1c vektor** számadatait másoljuk be (példánk max feladat, tehát **c vektor**t), végül a táblázat jobb szélére a **b** alá bemásoljuk a **b vektor** számadatait, majd a **b vektor** utolsó számadata alá mindig **0**-t írunk (ez mindig a ±z sor utolsó adata, amely mindig 0).

	x vektor	**v vektor**	**b**
u	**együttható mátrix**		**b**
±z	**±c vektor**		**0**
-z*			

a példában szereplő adatokkal pedig:

	x_1	x_2	x_3	v_2	v_3	**b**
u_1	**1**	**-2**	**0**			**6**
u_2^*	**1**	**0**	**3**			**7**
u_3^*	**-1**	**1**	**3**			**2**
u_4	**3**	**-2**	**-2**			**4**
–z	**4**	**-2**	**1**			**0**
-z*						

2D.LÉPÉS: ha a táblázat tartalmaz v_i oszlopokat, ezeket töltjük ki, mégpedig oszloponként haladva. Egy adott v_i oszlopba először 2 db **-1**-es számot írunk, éspedig az egyiket abba az u^* sorba, amelynek indexe azonos az éppen kitöltendő v_i oszlop indexével (azaz példánkban v_3 esetén u_3^* sorba), míg a másik **-1**-est mindig a -z* sorba. Ezt követően a v oszlopok üresen álló helyeit **0** értékekkel töltjük ki.

	x_1	x_2	x_3	v_3	**b**
u_1	1	-2	0		6
u_2^*	1	0	3		7
u_3^*	-1	1	3	-1	2
u_4	3	-2	-2		4
–z	4	-2	1		0
-z*				-1	

	x_1	x_2	x_3	v_3	**b**
u_1	1	-2	0	0	6
u_2^*	1	0	3	0	7
u_3^*	-1	1	3	-1	2
u_4	3	-2	-2	0	4
–z	4	-2	1	0	0
-z*				-1	

2E.LÉPÉS: ezt követően már csak a -z* sor kitöltése van hátra (csak akkor, ha van ilyen sorunk). Ennek a sornak egy adatát úgy kapjuk, hogy a kiszámítandó adat fölötti oszlopban összeadjuk azokat a számokat, amelyek u^* sorokban helyezkednek el.

	x_1	x_2	x_3	v_3	**b**
u_1	1	-2	0	0	6
u_2^*	1	0	3	0	7
u_3^*	-1	1	3	-1	2
u_4	3	-2	-2	0	4
–z	4	-2	1	0	0
-z*	0	1	6	-1	9

az elkészült induló táblázat tehát a következő:

	x_1	x_2	x_3	v_3	**b**
u_1	1	-2	0	0	6
u_2^*	1	0	3	0	7
u_3^*	-1	1	3	-1	2
u_4	3	-2	-2	0	4
–z	4	-2	1	0	0
-z*	0	1	6	-1	9

3. LÉPÉS: Bázistranszformációk sorozatát hajtjuk végre az induló táblázattól kezdődően, melyet a **-z*** sor vezérel. Ha a feladat nem tartalmaz -z* sort, akkor ez a lépés kimarad, azonnal a **4. LÉPÉS** következik.

3A.LÉPÉS: generáló elemet választunk az alábbi szabályok betartásával:

→ ***-z**** sor pozitív eleme feletti oszlopból kell választanunk, nem választhatunk **±z** sorban, ***b*** oszlopban, illetve ***u**** oszlopban lévő számot

	x_1	x_2	x_3	v_3	$\underline{b}$
u_1	1	-2	0	0	6
u_2*	1	0	3	0	7
u_3*	-1	1	3	-1	2
u_4	3	-2	-2	0	4
–z	4	-2	1	0	0
-z*	0	1	6	-1	9

→ a generáló elem csak pozitív szám lehet

	x_1	x_2	x_3	v_3	$\underline{b}$
u_1	1	-2	0	0	6
u_2*	1	0	3	0	7
u_3*	-1	1	3	-1	2
u_4	3	-2	-2	0	4
–z	4	-2	1	0	0
-z*	0	1	6	-1	9

→ ha egy oszlopon belül több generáló elem is lehetséges (a példában az x_3 oszlop ilyen), akkor ezek közül a számok közül csak a szűk keresztmetszetnél elhelyezkedőt szabad választani (előfordulhat, hogy a szűk keresztmetszet több szám esetén azonos, ezek közül már tetszőleges a választás). Ezt a szabályt csak egy adott oszlopon belül alkalmazhatjuk, két oszlop összehasonlítására nem alkalmas. A szabály lényege: az oszlopban az eddigiek alapján szóba jöhető generáló elemekkel sorban elosztjuk az adott generáló elemek sorának végén szereplő ***b*** oszlopbeli számokat. Amelyik eddig lehetséges generáló elemnél a kapott szám a legkisebb, az jöhet már csak szóba ezek után (ha több esetben azonos eredmény adódik, akkor az oszlopban több generáló elem lehetséges).

	x_1	x_2	x_3	v_3	$\underline{b}$	
u_1	1	-2	0	0	6	
u_2*	1	0	3	0	7	7/3
u_3*	-1	1	3	-1	2	2/3 → **ez a legkisebb, ez a szűk keresztmetszet**
u_4	3	-2	-2	0	4	
–z	4	-2	1	0	0	
-z*	0	1	6	-1	9	

	x_1	x_2	x_3	v_3	$\underline{b}$
u_1	1	-2	0	0	6
u_2*	1	0	3	0	7
u_3*	-1	1	3	-1	2
u_4	3	-2	-2	0	4
–z	4	-2	1	0	0
-z*	0	1	6	-1	9

→ a táblázatban mindezek után megmaradó lehetséges generáló elemek közül a választás már tetszőleges, de érdemes a következő két szempontot is figyelembe venni (ezek nem kötelező szabályok, de lerövidítik a feladat megoldását!!)

- érdemes ***u**** sorban elhelyezkedő elemet választani (ebből a szempontból a példában szereplő 1-es és 3-as is ideális)
- érdemes olyan számot választani, amellyel a generáló elemmel azonos sorban lévő összes számot maradék nélkül el tudjuk osztani (ebből a szempontból már csak az 1-es ideális, tehát ezt érdemes választani)

	x_1	x_2	x_3	v_3	$\underline{b}$
u_1	1	-2	0	0	6
u_2*	1	0	3	0	7
u_3*	-1	1	3	-1	2
u_4	3	-2	-2	0	4
–z	4	-2	1	0	0
-z*	0	1	6	-1	9

3B.LÉPÉS: a **generáló elem sorának elején és oszlopának tetején lévő „betűket"** kicseréljük egymással, majd ezekkel az új peremekkel új táblázatot készítünk

	x_1	x_2	x_3	v_3	$\underline{b}$
u_1	1	-2	0	0	6
u_2*	1	0	3	0	7
u_3*	-1	1	3	-1	2
u_4	3	-2	-2	0	4
–z	4	-2	1	0	0
-z*	0	1	6	-1	9

	x_1	u_3*	x_3	v_3	$\underline{b}$
u_1					
u_2*					
x_2					
u_4					
–z					
-z*					

3C.LÉPÉS: kiszámítjuk az új táblázatban azokat a számokat, amelyek a táblázat bal széléről a tetejére került „betű” alatt helyezkednek el. A számítás menete a következő:

→ a generáló elemnek megfelelő helyre beírjuk a generáló elem reciprokát (1/generáló elem).

	x_1	x_2	x_3	v_3	b
u_1	1	-2	0	0	6
u_2*	1	0	3	0	7
u_3*	-1	1	3	-1	2
u_4	3	-2	-2	0	4
$-z$	4	-2	1	0	0
$-z$*	0	1	6	-1	9

	x_1	u_3*	x_3	v_3	b
u_1					
u_2*					
x_2		1/1=1			
u_4					
$-z$					
$-z$*					

→ az oszlop többi elemét úgy kapjuk, hogy a generáló elem oszlopában lévő számokat (az előző táblázatban) elosztjuk a generáló elem -1-szeresével.

	x_1	x_2	x_3	v_3	b
u_1	1	-2	0	0	6
u_2*	1	0	3	0	7
u_3*	-1	1	3	-1	2
u_4	3	-2	-2	0	4
$-z$	4	-2	1	0	0
$-z$*	0	1	6	-1	9

	x_1	u_3*	x_3	v_3	b
u_1		-2/-1=2			
u_2*		0/-1=0			
x_2		1			
u_4		-2/-1=2			
$-z$		-2/-1=2			
$-z$*		1/-1=-1			

3D.LÉPÉS: kiszámítjuk az új táblázatban azokat a számokat, amelyek a generáló elemnek megfelelő sorban helyezkednek el (a generáló elem helyén álló szám kivételével, hiszen ezt már kiszámítottuk az előbb). A számítást úgy végezzük, hogy a generáló elem sorában lévő számokat (az előző táblázatban) elosztjuk a generáló elemmel.

	x_1	x_2	x_3	v_3	b
u_1	1	-2	0	0	6
u_2*	1	0	3	0	7
u_3*	-1	1	3	-1	2
u_4	3	-2	-2	0	4
$-z$	4	-2	1	0	0
$-z$*	0	1	6	-1	9

	x_1	u_3*	x_3	v_3	b
u_1		2			
u_2*		0			
x_2	-1/1=-1	1	3/1=3	-1/1=-1	2/1=2
u_4		2			
$-z$		2			
$-z$*		-1			

3E.LÉPÉS: kitöltjük az új táblázatban szereplő üres oszlopokat (mindegyik ilyen oszlopban már van egy ismert számadat) mégpedig oszloponként haladva balról jobb felé. Egy oszlop kitöltése mindig a következő képlet alkalmazásával történik:

(új oszlop ismeretlen számadatai) = (új oszloppal azonos betűjelű oszlop számadatai az előző táblázatban a generáló elem sorában lévő számadat nélkül)-(új oszlop ismert számadata)*(a generáló elem oszlopa az előző táblázatban a generáló elem nélkül)

(1,1,3,4,0) – (-1)*(-2,0,-2,-2,1) = (1,1,3,4,0) – (2,0,2,2,-1) = (-1,1,1,2,1)

	x_1	x_2	x_3	v_3	b
u_1	1	-2	0	0	6
u_2*	1	0	3	0	7
u_3*	-1	1	3	-1	2
u_4	3	-2	-2	0	4
$-z$	4	-2	1	0	0
$-z$*	0	1	6	-1	9

	x_1	u_3*	x_3	v_3	b
u_1		2			
u_2*		0			
x_2	-1	1	3	-1	2
u_4		2			
$-z$		2			
$-z$*		-1			

	x_1	u_3*	x_3	v_3	b
u_1	-1	2			
u_2*	1	0			
x_2	-1	1	3	-1	2
u_4	1	2			
$-z$	2	2			
$-z$*	1	-1			

(0,3,-2,1,6) – (3)*(-2,0,-2,-2,1) = (0,3,-2,1,6) – (-6,0,-6,-6,3) = (6,3,4,7,3)

	x_1	x_2	x_3	v_3	b
u_1	1	-2	0	0	6
u_2*	1	0	3	0	7
u_3*	-1	1	3	-1	2
u_4	3	-2	-2	0	4
$-z$	4	-2	1	0	0
$-z$*	0	1	6	-1	9

	x_1	u_3*	x_3	v_3	b
u_1	-1	2			
u_2*	1	0			
x_2	-1	1	3	-1	2
u_4	1	2			
$-z$	2	2			
$-z$*	1	-1			

	x_1	u_3*	x_3	v_3	b
u_1	-1	2	6		
u_2*	1	0	3		
x_2	-1	1	3	-1	2
u_4	1	2	4		
$-z$	2	2	7		
$-z$*	1	-1	3		

(0,0,0,0,-1) – (-1)*(-2,0,-2,-2,1) = (0,0,0,0,-1) – (2,0,2,2,-1) = (-2,0,-2,-2,0)

	x_1	x_2	x_3	v_3	b
u_1	1	-2	0	0	6
u_2*	1	0	3	0	7
u_3*	-1	1	3	-1	2
u_4	3	-2	-2	0	4
$-z$	4	-2	1	0	0
$-z$*	0	1	6	-1	9

	x_1	u_3*	x_3	v_3	b
u_1	-1	2	6		
u_2*	1	0	3		
x_2	-1	1	3	-1	2
u_4	1	2	4		
$-z$	2	2	7		
$-z$*	1	-1	3		

	x_1	u_3*	x_3	v_3	b
u_1	-1	2	6	-2	
u_2*	1	0	3	0	
x_2	-1	1	3	-1	2
u_4	1	2	4	-2	
$-z$	2	2	7	-2	
$-z$*	1	-1	3	0	

(6,7,4,0,9) – (2)*(-2,0,-2,-2,1) = (6,7,4,0,9) – (-4,0,-4,-4,2) = (10,7,8,4,7)

	x_1	x_2	x_3	v_3	b
u_1	1	-2	0	0	6
u_2^*	1	0	3	0	7
u_3^*	-1	1	3	-1	2
u_4	3	-2	-2	0	4
$-z$	4	-2	1	0	0
$-z^*$	0	1	6	-1	9

	x_1	u_3^*	x_3	v_3	b
u_1	-1	2	6	-2	
u_2^*	1	0	3	0	
x_2	-1	1	3	-1	2
u_4	1	2	4	-2	
$-z$	2	2	7	-2	
$-z^*$	1	-1	3	0	

	x_1	u_3^*	x_3	v_3	b
u_1	-1	2	6	-2	10
u_2^*	1	0	3	0	7
x_2	-1	1	3	-1	2
u_4	1	2	4	-2	8
$-z$	2	2	7	-2	4
$-z^*$	1	-1	3	0	7

3A-3E.LÉPÉSEK elvégzése után a következő új táblázatot kaptuk:

	x_1	u_3^*	x_3	v_3	b
u_1	-1	2	6	-2	10
u_2^*	1	0	3	0	7
x_2	-1	1	3	-1	2
u_4	1	2	4	-2	8
$-z$	2	2	7	-2	4
$-z^*$	1	-1	3	0	7

3F.LÉPÉS: Erről a táblázatról haladunk tovább, mégpedig úgy, hogy ismét végrehajtjuk a **3A-3E.LÉPÉSEK**-et addig, ameddig a **3A. LÉPÉS**-nél el nem akadunk, azaz valami miatt nem tudunk generáló elemet választani. A példában ez a következőképpen alakul (**3A**, **3B**, **3C**, **3D**, **3E**):

	x_1	u_3^*	x_3	v_3	b
u_1	-1	2	6	-2	10
u_2^*	1	0	3	0	7
x_2	-1	1	3	-1	2
u_4	1	2	4	-2	8
$-z$	2	2	7	-2	4
$-z^*$	1	-1	3	0	7

	u_2^*	u_3^*	x_3	v_3	b
u_1	1	2	9	-2	17
x_1	1	0	3	0	7
x_2	1	1	6	-1	9
u_4	-1	2	1	-2	1
$-z$	-2	2	1	-2	-10
$-z^*$	-1	-1	0	0	0

Az utolsó táblázat, ahol már nem tudjuk végrehajtani a **3A.LÉPÉS**T az alábbi:

	u_2^*	u_3^*	x_3	v_3	b
u_1	1	2	9	-2	17
x_1	1	0	3	0	7
x_2	1	1	6	-1	9
u_4	-1	2	1	-2	1
$-z$	-2	2	1	-2	-10
$-z^*$	-1	-1	0	0	0

Ha az utolsó táblázaton már nem tudunk generáló elemet választani, azaz nem tudjuk végrehajtani a **3A. LÉPÉS**-t, megnézzük, hogy a következő esetek közül melyik teljesül erre a táblázatra (**az értékelésnél az u^* és b oszlopokat figyelmen kívül kell hagyni !!**):

1.eset: **$-z^*$** sorban nincsen pozitív elem, de a baloldalon szereplő betűk között van **u^***

következtetés: a feladatnak nincsen lehetséges megoldása, ezért optimális megoldása sincsen, a feladatmegoldás végetért

2.eset: **$-z^*$** sorban van pozitív elem, de a pozitív elemek feletti oszlopokból nem tudunk generáló elemet választani

következtetés: a feladatnak nincsen lehetséges megoldása, ezért optimális megoldása sincsen, a feladatmegoldás végetért

3.eset: **$-z^*$** sorban nincsen pozitív elem és a baloldalon szereplő betűk között nincsen **u^***

következtetés: a kapott táblázat lehetséges megoldás, ezért a **$-z^*$** sort elhagyjuk, majd az így kapott táblázattal folytatjuk a feladatmegoldást, éspedig a **4. LÉPÉS** következik (a példánkban ez az eset fordul elő)

	u_2^*	u_3^*	x_3	v_3	b
u_1	1	2	9	-2	17
x_1	1	0	3	0	7
x_2	1	1	6	-1	9
u_4	-1	2	1	-2	1
$-z$	-2	2	1	-2	-10
$-z^*$	-1	-1	0	0	0

$-z^*$ sor elhagyása után a következőt kapjuk:

	u_2^*	u_3^*	x_3	v_3	b
u_1	1	2	9	-2	17
x_1	1	0	3	0	7
x_2	1	1	6	-1	9
u_4	-1	2	1	-2	1
$-z$	-2	2	1	-2	-10

<u>4. LÉPÉS:</u> Bázistranszformációk sorozatát hajtjuk végre a **<u>3. LÉPÉS</u>** (ha ilyen nem volt, akkor a **<u>2.LÉPÉS</u>**) után rendelkezésre álló táblázattól kezdődően, melyet a **±z** sor vezérel.

<u>4A.LÉPÉS:</u> generáló elemet választunk az alábbi szabályok betartásával (a szabályok gyakorlatilag ugyanazok, mint a **<u>3.LÉPÉS</u>** esetén, de a ***-z**** sor szerepét a **±z** sor veszi át):

→ **±z** sor pozitív eleme feletti oszlopból kell választanunk, nem választhatunk ***<u>b</u>*** oszlopban, illetve ***u**** oszlopban lévő számot

	u_2*	u_3*	x_3	v_3	<u>b</u>
u_1	1	2	9	-2	17
x_1	1	0	3	0	7
x_2	1	1	6	-1	9
u_4	-1	2	1	-2	1
–z	-2	2	1	-2	-10

→ a generáló elem csak pozitív szám lehet

	u_2*	u_3*	x_3	v_3	<u>b</u>
u_1	1	2	9	-2	17
x_1	1	0	3	0	7
x_2	1	1	6	-1	9
u_4	-1	2	1	-2	1
–z	-2	2	1	-2	-10

→ ha egy oszlopon belül több generáló elem is lehetséges (a példában az x_3 oszlop ilyen), akkor ezek közül a számok közül csak a szűk keresztmetszetnél elhelyezkedőt szabad választani (előfordulhat, hogy a szűk keresztmetszet több szám esetén azonos, ezek közül már tetszőleges a választás). Ezt a szabályt csak egy adott oszlopon belül alkalmazhatjuk, két oszlop összehasonlítására nem alkalmas. A szabály lényege: az oszlopban az eddigiek alapján szóba jöhető generáló elemekkel sorban elosztjuk az adott generáló elemek sorának végén szereplő ***<u>b</u>*** oszlopbeli számokat. Amelyik eddig lehetséges generáló elemnél a kapott szám a legkisebb, az jöhet már csak szóba ezek után (ha több esetben azonos eredmény adódik, akkor az oszlopban több generáló elem lehetséges).

	u_2*	u_3*	x_3	v_3	<u>b</u>	
u_1	1	2	9	-2	17	17/9
x_1	1	0	3	0	7	7/3
x_2	1	1	6	-1	9	9/6
u_4	-1	2	1	-2	1	1/1→ **ez a legkisebb, ez a szűk keresztmetszet**
–z	-2	2	1	-2	-10	

	u_2*	u_3*	x_3	v_3	<u>b</u>
u_1	1	2	9	-2	17
x_1	1	0	3	0	7
x_2	1	1	6	-1	9
u_4	-1	2	1	-2	1
–z	-2	2	1	-2	-10

→ a táblázatban mindezek után megmaradó lehetséges generáló elemek közül a választás már tetszőleges, de érdemes a következő szempontot is figyelembe venni (ez nem kötelező szabály, de leegyszerűsíti a feladat megoldását!!)

- érdemes olyan számot választani, amellyel a generáló elemmel azonos sorban lévő összes számot maradék nélkül el tudjuk osztani (mivel a példában csak egyetlen elem jön szóba, bármi legyen is ez, ezt kell választanunk, de szerencsére ez éppen 1-es)

	u_2*	u_3*	x_3	v_3	<u>b</u>
u_1	1	2	9	-2	17
x_1	1	0	3	0	7
x_2	1	1	6	-1	9
u_4	-1	2	1	-2	1
–z	-2	2	1	-2	-10

<u>4B-4E.LÉPÉSEK:</u> pontosan megegyeznek a **<u>3B-3E.LÉPÉSEK</u>** esetén bemutatott számításokkal. Ciklikusan mindaddig ismételgetjük a **<u>4A-4E.LÉPÉSEK</u>**-et (melyek ugyanazok, mint a **<u>3A-3E.LÉPÉSEK</u>**), ameddig a **<u>4A. LÉPÉS</u>**-nél el nem akadunk, azaz valami miatt nem tudunk generáló elemet választani. A példában ez a következőképpen alakul (**4A**, **4B**, **4C**, **4D**, **4E**):

	u_2*	u_3*	x_3	v_3	<u>b</u>
u_1	1	2	9	-2	17
x_1	1	0	3	0	7
x_2	1	1	6	-1	9
u_4	-1	2	1	-2	1
–z	-2	2	1	-2	-10

	u_2*	u_3*	u_4	v_3	<u>b</u>
u_1	10	-16	-9	16	8
x_1	4	-6	-3	6	4
x_2	7	-11	-6	11	3
x_3	-1	2	1	-2	1
–z	-1	0	-1	0	-11

Az utolsó táblázat, ahol már nem tudjuk végrehajtani a **<u>4A.LÉPÉS</u>**T az alábbi:

	u_2*	u_3*	u_4	v_3	<u>b</u>
u_1	10	-16	-9	16	8
x_1	4	-6	-3	6	4
x_2	7	-11	-6	11	3
x_3	-1	2	1	-2	1
–z	-1	0	-1	0	-11

4F.LÉPÉS: Ha az utolsó táblázaton már nem tudunk generáló elemet választani, azaz nem tudjuk végrehajtani a **4A. LÉPÉS**-t, megnézzük, hogy a következő esetek közül melyik teljesül erre a táblázatra (**az értékelésnél az u^* és b oszlopokat figyelmen kívül kell hagyni !!**):

1.eset: $\pm z$ sorban van pozitív elem, mégsem tudunk generáló elemet választani

következtetés: a feladatnak nincsen optimális megoldása (min feladatnál a célfüggvény alulról, max feladatnál felülről nem korlátos a lehetséges megoldások halmazán), a feladatmegoldás végetért

2.eset: $\pm z$ sorban csak negatív számok szerepelnek

következtetés: a kapott táblázat optimális bázismegoldás (optimális táblázat), a feladatnak egyetlen optimális megoldása létezik, folytatjuk az **5.LÉPÉS**-sel

3.eset: $\pm z$ sorban nincsen pozitív szám, de a negatív számokon kívül szerepel 0 is, a 0 feletti oszlopban pedig vannak pozitív elemek (a példánk éppen ilyen)

következtetés: a kapott táblázat optimális bázismegoldás (optimális táblázat), de nem az egyetlen optimum, a feladatnak alternatív optimuma is van (létezik újabb optimális táblázat). Ilyenkor először előállítjuk az újabb optimális táblázatot mégpedig úgy, hogy a 0 feletti oszlopból generáló elemet választva (a szokásos szabályok betartásával) elvégezzük a bázistranszformációt. Ekkor mind a kapott táblázat, mind pedig az eredeti táblázat optimális bázismegoldás (2db optimális táblázatunk lesz), a feladatnak pedig összességében végtelen sok optimuma lesz. A bázistranszformáció elvégzése után folytatjuk az **5.LÉPÉS**-sel

Az egyik optimum:

	u_2^*	u_3^*	u_4	v_3	b
u_1	10	-16	-9	16	8
x_1	4	-6	-3	6	4
x_2	7	-11	-6	11	3
x_3	-1	2	1	-2	1
$-z$	-1	0	-1	0	-11

Elvégezve a bázistranszformációt a másik optimum:

	u_2^*	u_3^*	u_4	x_2	b
u_1	-2/11	0	-3/11	-16/11	40/11
x_1	2/11	0	3/11	-6/11	26/11
v_3	7/11	-1	-6/11	1/11	3/11
x_3	3/11	0	-1/11	2/11	17/11
$-z$	-1	0	-1	0	-11

4.eset: $\pm z$ sorban nincsen pozitív szám, de a negatív számokon kívül szerepel 0 is, a 0 feletti oszlopban pedig nincsenek pozitív elemek

következtetés: a kapott táblázat optimális bázismegoldás (optimális táblázat), a feladatnak végtelen sok optimális megoldása létezik, folytatjuk az **5.LÉPÉS**-sel

A **4.LÉPÉS** végrehajtása után tehát azt kapjuk, hogy a feladatnak 2 db optimális bázismegoldása (2 db optimális táblázat) van, éspedig:

	u_2^*	u_3^*	u_4	v_3	b
u_1	10	-16	-9	16	8
x_1	4	-6	-3	6	4
x_2	7	-11	-6	11	3
x_3	-1	2	1	-2	1
$-z$	-1	0	-1	0	-11

	u_2^*	u_3^*	u_4	x_2	b
u_1	-2/11	0	-3/11	-16/11	40/11
x_1	2/11	0	3/11	-6/11	26/11
v_3	7/11	-1	-6/11	1/11	3/11
x_3	3/11	0	-1/11	2/11	17/11
$-z$	-1	0	-1	0	-11

5. LÉPÉS: Az optimális táblázatról leolvassuk az egyes változók (**x, u, v**) optimális értékeit valamint az optimális célfüggvényértéket (**z**), majd a leolvasott értékeket vektor alakban írjuk fel. Attól függően, hogy a feladat a **4F.LÉPÉS alapján** melyik esethez tartozott, itt is több esetet különböztetünk meg (először döntsük el, hogy a feladat a 2 eset közül melyikhez tartozik és eszerint folytassuk):

1.eset: ha a feladat a **4F LÉPÉS**-ben a **2.eset**hez vagy a **3.eset**hez tartozott, akkor a következőt tesszük:

Megjegyzés: ha a feladat a **4F LÉPÉS**-ben a **3.eset**hez tartozott, akkor a következő lépéseket mindkét optimális táblázattal végrehajtjuk, mégpedig először külön az egyik táblázattal, majd ezt követően külön a másikkal is!!!

5/1A.LÉPÉS: A **bázisban elhelyezkedő változók** értékét a táblázat jobboldalán, azaz a **b oszlop**ban találjuk

	u_2^*	u_3^*	u_4	v_3	b
u_1	10	-16	-9	16	8
x_1	4	-6	-3	6	4
x_2	7	-11	-6	11	3
x_3	-1	2	1	-2	1
$-z$	-1	0	-1	0	-11

Ennek alapján a példa első optimális táblázatáról: **$u_1 = 8, x_1 = 4, x_2 = 3, x_3 = 1$**

5/1B.LÉPÉS: Az **összes bázison kívül elhelyezkedő változó** (ezeket a táblázat tetején találjuk) értéke **nulla**

	u_2^*	u_3^*	u_4	v_3	b
u_1	10	-16	-9	16	8
x_1	4	-6	-3	6	4
x_2	7	-11	-6	11	3
x_3	-1	2	1	-2	1
$-z$	-1	0	-1	0	-11

Ennek alapján a példa első optimális táblázatáról: **$u_2^* = 0, u_3^* = 0, u_4 = 0, v_3 = 0$**

5/1C.LÉPÉS: Az **optimális célfüggvényérték** (ennek jele z érték)a táblázat **+z sor**ának **utolsó érték**e, **-z sor** esetén a sor **utolsó érték**ének **-1-szerese**

	u_2^*	u_3^*	u_4	v_3	b
u_1	10	-16	-9	16	8
x_1	4	-6	-3	6	4
x_2	7	-11	-6	11	3
x_3	-1	2	1	-2	1
$-z$	-1	0	-1	0	-11

Ennek alapján a példa első optimális táblázatáról: $z = 11$

5/1D.LÉPÉS: Elékészítjük az $\underline{x}_o$ **vektor**t, melyet úgy kapunk, hogy az **5/1A.LÉPÉS**-ben és az **5/1B.LÉPÉS**-ben kapott x értékeket vektor alakba rendezzük.

$\underline{x}_o = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$ a példa adataival pedig $\underline{x}_o = (x_1, x_2, x_3) = (4, 3, 1)$

Megjegyzés: ha 2 db optimális táblázatunk van, akkor 2db $\underline{x}_o$ **vektor**unk lesz (a másik táblázatról is le fogunk olvasni egyet), ezért az $\underline{x}_o$ **vektorok**at indexekkel látjuk el, éspedig $\underline{x}_{o1}$ és $\underline{x}_{o2}$ módon.

$\underline{x}_{o1} = (4, 3, 1)$

5/1E.LÉPÉS: Elékészítjük az $\underline{u}_o$ **vektor**t, melyet úgy kapunk, hogy az **5/1A.LÉPÉS**-ben és az **5/1B.LÉPÉS**-ben kapott ***u* és *v*** értékeket vektor alakba rendezzük. A vektor készítésénél a ***v* betű** mindig **elsőbbséget élvez** az ***u*** betűvel szemben, azaz **ha van *v* betű**nk, akkor **ez kerül a vektor megfelelő helyére** és **a hozzá tartozó *u* betű értéke nem számít**. Ha bármelyik ***u* betű hiányzik és nincsen ugyanilyen indexű *v* betű**, akkor az **érték nulla**.

$\underline{u}_o = (u_1 \text{ vagy } v_1, u_2 \text{ vagy } v_2, u_3 \text{ vagy } v_3, \ldots)$ a példa adataival pedig $\underline{u}_o = (u_1, u_2, v_3, u_4) = (8, 0, 0, 0)$

A vektor harmadik komponense v_3, mert a ***v* betű elsőbbséget élvez *u* betű**vel szemben!!

Megjegyzés: ha 2 db optimális táblázatunk van, akkor 2db $\underline{u}_o$ **vektor**unk lesz (a másik táblázatról is le fogunk olvasni egyet), ezért az $\underline{u}_o$ **vektorok**at indexekkel látjuk el, éspedig $\underline{u}_{o1}$ és $\underline{u}_{o2}$ módon.

$\underline{u}_{o1} = (8, 0, 0, 0)$

Mivel a példánkban 2db optimális táblázatunk volt, az **5/1A-5/1E.LÉPÉSEK**-et végrehajtjuk a másik optimális táblázattal is, ekkor a következő eredményeket kapjuk:

	u_2^*	u_3^*	u_4	x_2	b
u_1	-2/11	0	-3/11	-16/11	40/11
x_1	2/11	0	3/11	-6/11	26/11
v_3	7/11	-1	-6/11	1/11	3/11
x_3	3/11	0	-1/11	2/11	17/11
$-z$	-1	0	-1	0	-11

$u_1 = 40/11, x_1 = 26/11, v_3 = 3/11, x_3 = 17/11$ és $u_2^* = 0, u_3^* = 0, u_4 = 0, x_2 = 0$ és $z = 11$

a vektorok pedig

$\underline{x}_{o2} = (26/11, 0, 17/11)$ és $\underline{u}_{o2} = (40/11, 0, 3/11, 0)$

5/1F.LÉPÉS: Csak akkor szükséges, ha2 db optimális táblázatunk van, ekkor a kapott vektorokat behelyettesítjük a következő képletekbe és elvégezzük a műveleteket

$\underline{x}_o = \lambda\, \underline{x}_{o1} + (1-\lambda)\, \underline{x}_{o2}$ ahol $0 \le \lambda \le 1$ és $\underline{u}_o = \lambda\, \underline{u}_{o1} + (1-\lambda)\, \underline{u}_{o2}$ ahol $0 \le \lambda \le 1$

a példánk adatai alapján ez a következőképpen alakul:

$\underline{x}_o = \lambda(4, 3, 1) + (1-\lambda)(26/11, 0, 17/11)$ azaz $\underline{x}_o = (26/11+18\lambda/11, 3\lambda, 17/11-6\lambda/11)$

és

$\underline{u}_o = \lambda(8, 0, 0, 0) + (1-\lambda)(40/11, 0, 3/11, 0)$ azaz $\underline{u}_o = (40/11+48\lambda/11, 0, 3/11-3\lambda/11, 0)$

EZZEL A FELADATMEGOLDÁS VÉGETÉRT

2.eset: ha a feladat a **4F LÉPÉS**-ben a **4.eset**hez tartozott, akkor a következőt tesszük:

Tételezzük fel, hogy egy LP feladat megoldása során a következő táblázatot kapjuk (ez nem az eredeti feladatunk, hanem egy új feladat utolsó táblázata)

	u_2*	u_3*	x_3	u_4	b
u_1	2	0	-2	2	5
x_1	5	0	-3	6	3
x_2	-3	0	0	-1	4
v_3	-1	-1	-1	-2	1
z	3	0	0	-2	-20

Könnyen ellenőrizhető, hogy ez a táblázat a **4F.LÉPÉS** alapján az ott említett **4.eset**hez tartozik (a **0 feletti oszlop**ban nem tudunk generáló elemet választani, mert nincsen pozitív szám), ezért az **5.LÉPÉS**-ben nem alkalmazhatjuk az előbb leírt **1.eset** lépéseit, hanem a következő lépéseket hajtjuk végre:

	u_2*	u_3*	x_3	u_4	b
u_1	2	0	-2	2	5
x_1	5	0	-3	6	3
x_2	-3	0	0	-1	4
v_3	-1	-1	-1	-2	1
z	3	0	0	-2	-20

5/2A.LÉPÉS: A **bázisban elhelyezkedő változók** értékét a következő képlet alapján számítjuk:

(bázisváltozók) = **b oszlop** számadatai – λ(annak a **0 feletti oszlop**nak a számadatai, **ahol nem tudtunk generáló elemet választani**)

ahol $\lambda \geq 0$

a fenti példában szereplő adatokkal ez a következőképpen alakul

$(u_1, x_1, x_2, v_3) = (5, 3, 4, 1) - \lambda(-2, -3, 0, -1)$

a műveleteket elvégzése után pedig a következőt kapjuk

$(u_1, x_1, x_2, v_3) = (5+2\lambda, 3+3\lambda, 4, 1+\lambda)$, azaz $u_1 = 5+2\lambda$, $x_1 = 3+3\lambda$, $x_2 = 4$, $v_3 = 1+\lambda$

5/2B.LÉPÉS: Az **összes bázison kívül elhelyezkedő változó** (ezeket a táblázat tetején találjuk) értéke **nulla**, **kivéve** azt a **változót**, amely annak az **oszlop**nak a **tetején** van, ahol **nem tudtunk generáló elemet választani**, mert ennek az **értéke** **nem nulla**, hanem **λ**

	u_2*	u_3*	x_3	u_4	b
u_1	2	0	-2	2	5
x_1	5	0	-3	6	3
x_2	-3	0	0	-1	4
v_3	-1	-1	-1	-2	1
z	3	0	0	-2	-20

Ennek alapján a fenti táblázatról: $u_2^* = 0$, $u_3^* = 0$, $x_3 = \lambda$, $u_4 = 0$

5/2C.LÉPÉS: Az **optimális célfüggvényérték** (ennek jele *z* érték)a táblázat **+z sor**ának **utolsó érték**e, **-z sor** esetén a sor **utolsó érték**ének **-1-szerese**

	u_2*	u_3*	x_3	u_4	b
u_1	2	0	-2	2	5
x_1	5	0	-3	6	3
x_2	-3	0	0	-1	4
v_3	-1	-1	-1	-2	1
z	3	0	0	-2	-20

Ennek alapján a fenti táblázatról: $z = -20$

5/2D.LÉPÉS: Elékészítjük az **x_o vektor**t, melyet úgy kapunk, hogy az **5/2A.LÉPÉS**-ben és az **5/2B.LÉPÉS**-ben kapott *x* értékeket vektor alakba rendezzük.

$x_o = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$ a példa adataival pedig $x_o = (x_1, x_2, x_3) = (3+3\lambda, 4, \lambda)$

5/2E.LÉPÉS: Elékészítjük az **u_o vektor**t, melyet úgy kapunk, hogy az **5/2A.LÉPÉS**-ben és az **5/2B.LÉPÉS**-ben kapott ***u* és *v*** értékeket vektor alakba rendezzük. A vektor készítésénél a ***v* betű** mindig **elsőbbséget élvez** az ***u*** betűvel szemben, azaz **ha van *v* betű**nk, akkor **ez kerül a vektor megfelelő helyére** és **a hozzá tartozó *u* betű értéke** **nem számít**. Ha bármelyik ***u* betű hiányzik és nincsen ugyanilyen indexű *v* betű**, akkor az **érték nulla**.

$u_o = (u_1 \text{ vagy } v_1, u_2 \text{ vagy } v_2, u_3 \text{ vagy } v_3, \ldots)$ a példa adataival pedig $u_o = (u_1, u_2, v_3, u_4) = (5+2\lambda, 0, 1+\lambda, 0)$

A vektor harmadik komponense v_3, mert a ***v* betű elsőbbséget élvez *u* betű**vel szemben!!

EZZEL A FELADATMEGOLDÁS VÉGETÉRT