1. Vizsgáld meg az alábbi sorozatok monotonitását, konvergenciáját, korlátosságát!

a) $a_n = \dfrac{3^{n-1} - 1}{3^{n+1} + 2} \qquad \varepsilon = 10^{-2}$

b) $b_n = \dfrac{2^{2n+1} - 2^{-2n-1}}{4^n - 4^{-n}}$

c) $c_n = \dfrac{3^{2n+1} + \left(\frac{1}{5}\right)^{1-n}}{2 + 9^{n-1}}$

d) $d_n = \dfrac{(-2)^{3n+1} + 4^{n-1}}{2 + 2^{2n+1}}$

2. Számitsd ki az alábbi sorozatok határértékét!

a) $a_n = \left(\dfrac{3}{2}\right)^n \cdot \left(\dfrac{2n + \ln 16}{3n}\right)^{n-1}$

b) $b_n = \dfrac{n^2 + 2n + 3}{\sqrt{n^4 + 2n} - \sqrt{n}}$

c) $c_n = \dfrac{4n - 3}{\sqrt[3]{8n^5 + 3} + 1}$

d) $d_n = \sqrt{n+1}\left(\sqrt{n^2 - 1} - n\right)$

e) $e_n = \left(\dfrac{3 + 2n}{2 - 3n}\right)^{n+3}$

f) $f_n = n^2 \cdot \left(\sqrt{n^4 - 4} - n^2\right)$

g) $g_n = \left(\dfrac{3\sqrt{n} + 3}{3\sqrt{n} + 4}\right)^{2\sqrt{n} + 1}$

h) $h_n = \dfrac{\sqrt[3]{n^2 + 3n + 6}}{\sqrt[4]{n^3 + 6n + 1} - \sqrt{n}}$

3. Határozd meg az alábbi függvények deriváltfüggvényét!

a) $\dfrac{\sin^2(\arcsin x) + \sin 3}{2^{\mathrm{tg}^2 x} \cdot \sqrt[3]{1 + x^2}}$

b) $\dfrac{2^{\sin x^2} - \mathrm{tg}\, 3x}{\arcsin x^2 + e^2}$

c) $\dfrac{(\mathrm{tg}\, x) \cdot \log_2(1 + 2x^2)}{\arcsin^2 (3 - 6x)^3}$

d) $\dfrac{\sqrt{1 + \log_3^2 x} - \sin x \cdot \mathrm{arctg}\, x^3}{1 + 2^{\sqrt{x}}}$

MEGOLDÁSOK :

1a) szig. mon. nő, konvergens, határérték $1/9$, korlátos: $0 \leq a_n < \frac{1}{9}$, küszöbszám: 3

1b) szig. mon. csökken, konvergens, határérték 2, korlátos $2 < a_n \leq 21/10$

1c) nem monoton, konvergens, határérték 27, korlátos $\frac{28}{3} \leq a_n \leq \frac{19808}{731}$

1d) nem monoton, nem konvergens, nincs határérték, nem korlátos

2a) 6 2b) 1 2c) 0 2d) 0 2e) 0

2f) -2 2g) $e^{-2/3}$ 2h) 0

3a) $$\frac{2x\cdot 2^{\operatorname{tg}^2 x}\cdot\sqrt[3]{1+x^2}-(x^2+\sin 3)\cdot\left[\frac{2^{\operatorname{tg}^2 x}\cdot 2\operatorname{tg}x\cdot\sqrt[3]{1+x^2}\cdot\ln 2}{\cos^2 x}+\frac{2\cdot 2^{\operatorname{tg}^2 x}\cdot x}{3\cdot\sqrt[3]{(1+x^2)^2}}\right]}{4^{\operatorname{tg}^2 x}\cdot\sqrt[3]{(1+x^2)^2}}$$

3b) $$\frac{\left[2^{\sin x^2}\cdot(\cos x^2)\cdot 2x\ln 2-\frac{3}{\cos^2 3x}\right]\cdot(\arcsin x^2+e^2)-(2^{\sin x^2}-\operatorname{tg}3x)\cdot\frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}}{(\arcsin x^2+e^2)^2}$$

3c) $$\frac{\left[\frac{\lg_2(1+2x^2)}{\cos^2 x}+\frac{4x\operatorname{tg}x}{(1+2x^2)\ln 2}\right]\cdot\arcsin^2(3-6x)^3-\operatorname{tg}x\lg_2(1+2x^2)\frac{2\cdot\arcsin(3-6x)^3\cdot(-18)(3-6x)^2}{\sqrt{1-(3-6x)^6}}}{\arcsin^4(3-6x)^3}$$

3d) $$\frac{\left[\frac{\lg_3 x}{x\cdot\sqrt{1+\log_3^2 x}\cdot\ln 3}-\cos x\cdot\operatorname{arctg}x^3+\frac{3x^2\sin x}{1+x^6}\right]\cdot(1+2^{\sqrt{x}})-\left(\sqrt{1+\log_3^2 x}-\sin x\operatorname{arctg}x^3\right)\cdot\frac{2^{\sqrt{x}}\ln 2}{2\sqrt{x}}}{(1+2^{\sqrt{x}})^2}$$